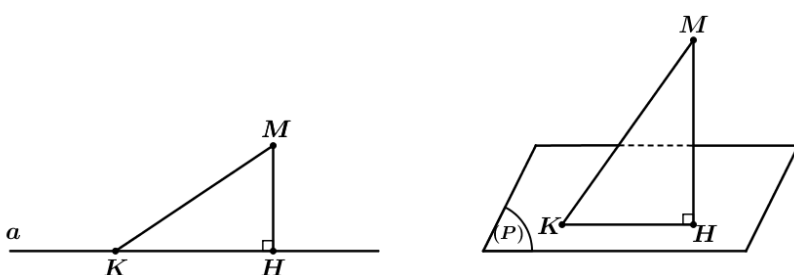


1 Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

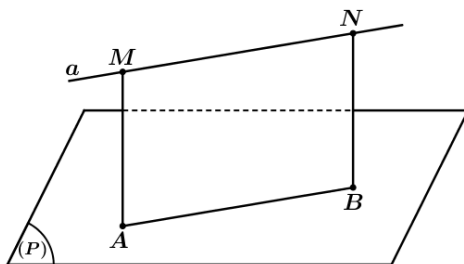
Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a , kí hiệu $d(M, a)$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên a .

Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P) , kí hiệu $d(M, (P))$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên (P) .

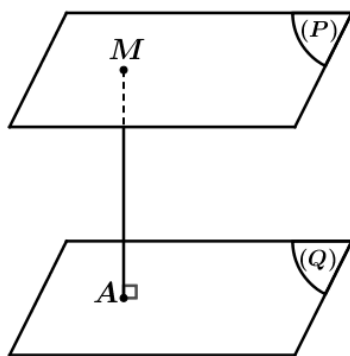
Chú ý:

- $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi $M \in a$; $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi $M \in (P)$.
- Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó.

Nhận xét: Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).

2 Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a , kí hiệu $d(a, (P))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P) .

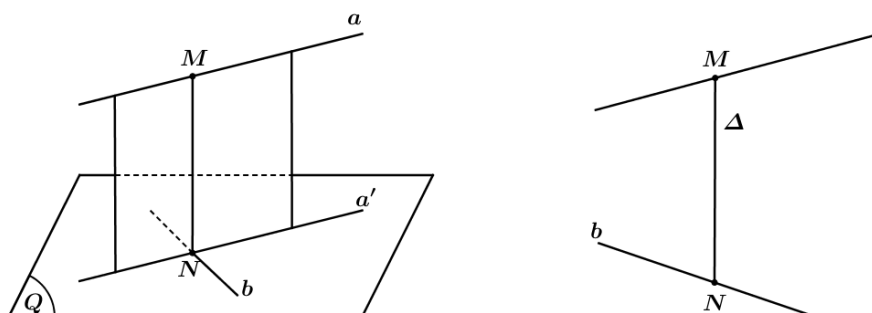


Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) , kí hiệu $d((P), (Q))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n , kí hiệu $d(m, n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Chú ý: Khoảng cách giữa hai đáy của một hình lăng trụ được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đó.

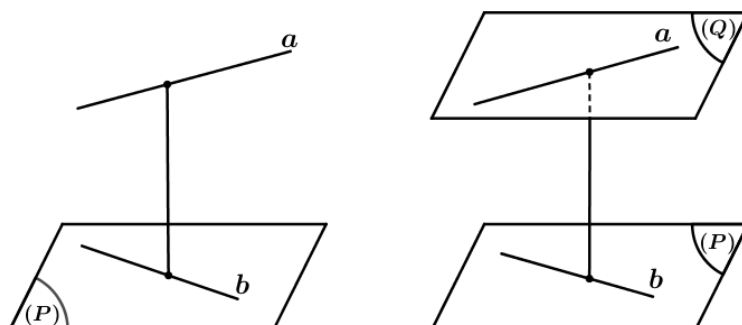
3 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau



Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung của a và b .

Nếu đường vuông góc chung Δ cắt a, b tương ứng tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b .

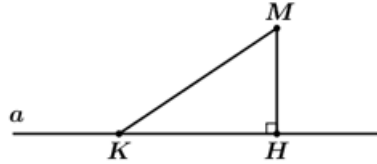
Nhận xét:



Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, tương ứng chứa hai đường thẳng đó.

Dạng 1: Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

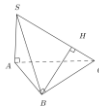


Cách tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

- Xác định hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng a
- Khi đó ta có: $d(M, a) = MH$
- Tính độ dài MH bằng kiến thức hình học phẳng cơ bản, các định lý và hệ thức lượng trong tam giác.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = 3a$, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$. Tính khoảng cách từ B đến SC .

Lời giải



Vì SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một nên $CB \perp SB$.

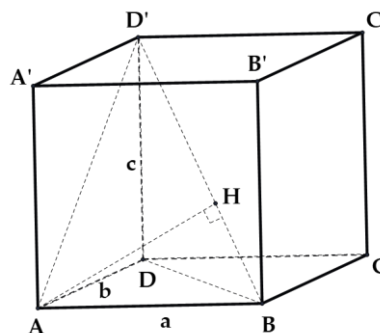
Kẻ $BH \perp SC$. Khi đó $d(B; SC) = BH$.

Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2\sqrt{3}a$.

Trong tam giác vuông SBC ta có: $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{SB \cdot BC}{\sqrt{SB^2 + BC^2}} = 2a\sqrt{\frac{3}{13}}$.

Ví dụ 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AA' = c$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD' .

Lời giải



Do $AB \perp AD'$ nên tam giác ABD' vuông tại A . Trong tam giác ABD' kẻ đường cao AH thì

$$AH = d(A, BD')$$

Trong tam giác ADD' ta có: $AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$

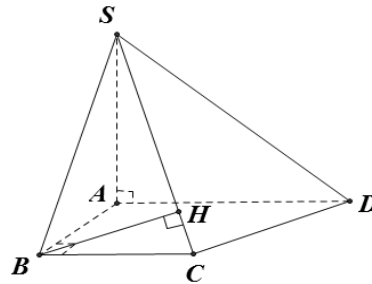
Mặt khác: $BD' = \sqrt{AB^2 + AD'^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Xét tam giác ABD' : $AH \cdot BD' = AB \cdot AD' \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AD'}{BD'} = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Vậy $d(A, BD') = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC , đồng thời đường cao $AB = BC = 2a$. Biết $SA = 2a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh B đến đường thẳng SC .

Lời giải



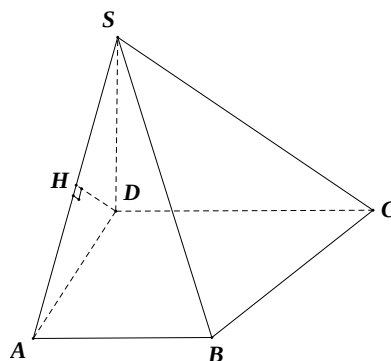
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B .

Trong $\triangle SBC$ dựng đường cao $BH \Rightarrow d(B; SC) = BH$.

$$SB = 4a; \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{BS \cdot BC}{\sqrt{BS^2 + BC^2}} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}.$$

Ví dụ 4: Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D , $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SD = a\sqrt{2}$. Biết điểm M di động trên đường thẳng CD . Tìm giá trị nhỏ nhất khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng SA .

Lời giải

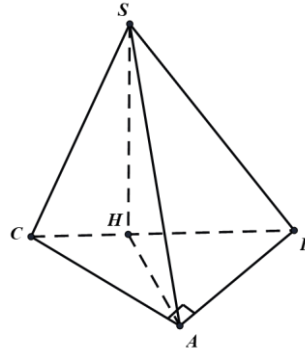


Để thấy khoảng cách này bằng khoảng cách từ điểm D đến đường thẳng SA

Trong tam giác vuông SAD ta có: $\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow DH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$; $SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC .

Lời giải



Ta có vì $SA = SB = SC$ nên $\Rightarrow S$ nằm trên đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với đáy. Mà ΔABC vuông cân tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là trung điểm H của BC . Vậy S nằm trên đường thẳng đi qua H vuông góc với (ABC) .

Mà góc giữa đường thẳng SA và (ABC) là $60^\circ \Rightarrow \angle SAH = 60^\circ$

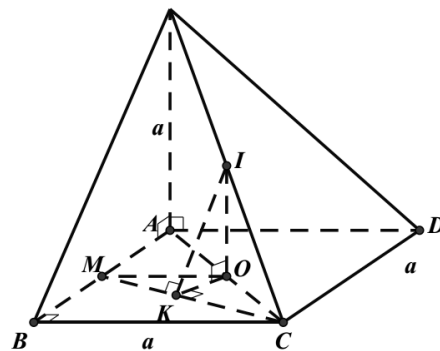
ΔABC vuông cân tại A có $AB = 2a \Rightarrow BC = 2a\sqrt{2}$. Mà H là trung điểm của BC
 $\Rightarrow AH = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$

Xét tam giác vuông SHA ta có: $SH = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$

Vậy khoảng cách từ S đến đường thẳng BC là $a\sqrt{6}$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O , $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của đoạn AB . Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM .

Lời giải



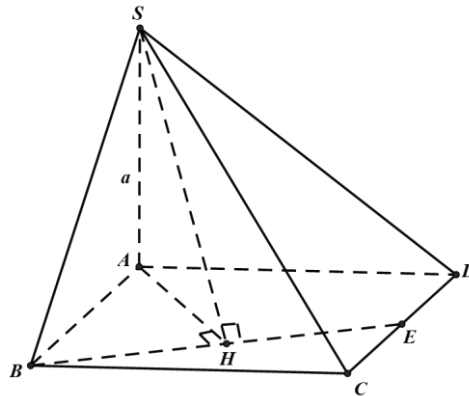
Do $IO \perp (ABCD)$ nên nếu dựng $OK \perp CM$ ($K \in CM$) thì $d(I, CM) = IK$

$$\text{Mà } IK = \sqrt{OI^2 + OK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + OK^2} \text{ do } S_{\Delta OMC} = \frac{1}{2}OK \cdot MC \Rightarrow OK = \frac{2S_{\Delta OMC}}{MC} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Suy ra } IK = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE :

Lời giải



$SA \perp (ABCD)$, trong mặt phẳng $(ABCD)$ nếu dựng $AH \perp BE$ tại H thì $SH \perp BE$ (định lý 3 đường vuông góc). Tức là khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE bằng đoạn SH .

$$\text{Ta có: } S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot FE = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} AH \cdot BE \text{ mà } BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a^2}{BE} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \text{ mà } \triangle SAH \text{ vuông tại } A \text{ nên: } SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy } d(S, BE) = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

Dạng 2: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Bài toán xác định khoảng cách từ một điểm O đến mặt phẳng (P) .

Bước 1: Xác định điểm H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (α)

Dựng mặt phẳng (P) chứa O và vuông góc với (α)

Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) và (α)

Kẻ $OH \perp \Delta (H \in \Delta)$. Khi đó $d(O;(\alpha)) = OH$

Bước 2: Tính OH bằng cách sử dụng tính chất của tứ diện vuông.

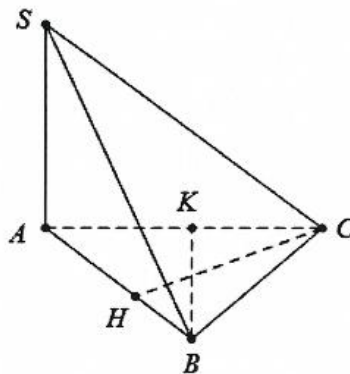
Giả sử $OABC$ là tứ diện vuông tại O ($OA \perp OB$; $OB \perp OC$; $OC \perp OA$) và H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC) . Khi đó ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC có $AB = 3a, BC = 2a, \angle ABC = 60^\circ$. Biết $SA \perp (ABC)$.

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) .

b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải



a) Dựng $CH \perp AB$ ta có: $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB)$.

Do đó: $d(C; (SAB)) = CH = CB \sin \angle ABH = 2a \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$.

b) Dựng $BK \perp AC \Rightarrow BK \perp (SAC)$.

Ta có: $d(B; (SAC)) = BK = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{AB \cdot BC \sin \angle ABC}{AC}$

Trong đó $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$

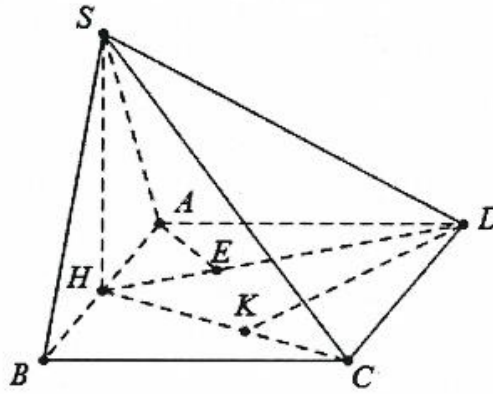
$\Rightarrow AC = a\sqrt{7} \Rightarrow d(B; (SAC)) = \frac{3a \cdot 2a \cdot \sin 60^\circ}{a\sqrt{7}} = \frac{3a\sqrt{21}}{7}$

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB .

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SHD) .

b) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC) .

Lời giải



a) Do tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp AB$. Ta có: $HA = HD = \frac{a}{2}$.

Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Dựng $AE \perp DH \Rightarrow AE \perp (SHD) \Rightarrow d(A; (SHD)) = AE$.

$$\text{Mặt khác } AE = \frac{AH \cdot AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

b) Dựng $DK \perp CH \Rightarrow d(D; (SHC)) = DK$.

$$\text{Ta có: } CH = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}, S_{HCD} = \frac{1}{2} CD \cdot d(H; CD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

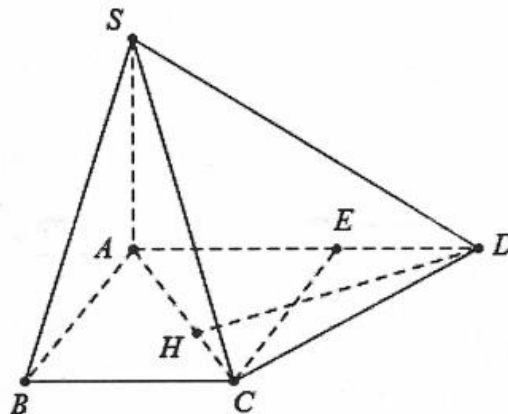
$$\text{Do đó } d(D; (SHC)) = \frac{2S_{HCD}}{CH} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 3a, AB = BC = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$.

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD) .

b) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải



a) Dựng $CE \perp AD \Rightarrow CE \perp (SAD)$.

Khi đó $d(C; (SAD)) = CE$, do $ABCE$ là hình vuông cạnh $2a$ nên

$$CE = AE = 2a \Rightarrow d(C; (SAD)) = 2a.$$

b) Dựng $DH \perp AC \Rightarrow DH \perp (SAC)$. Khi đó $d(D; (SAC)) = DH$.

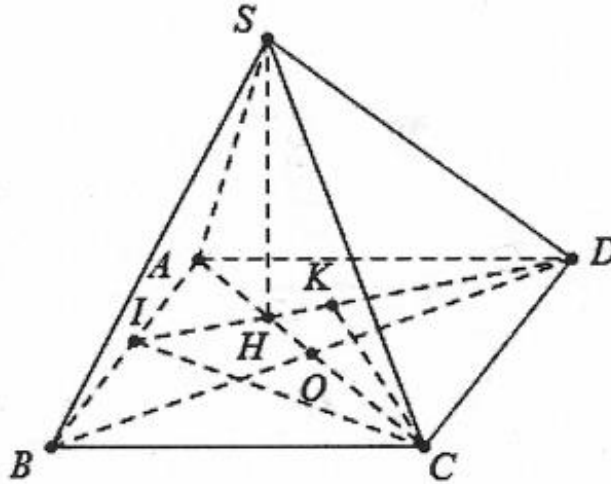
Ta có: $ABCE$ là hình vuông nên $CAD = 45^\circ$. Do đó $DH = AD \sin 45^\circ = 3a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $5a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm H của tam giác ABD .

a) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

b) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SHD) .

Lời giải



a) Do H là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow H \in AC$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow BO \perp AC$.

Mặt khác $BO \perp SH \Rightarrow BO \perp (SAC)$. Khi đó $d(B; (SAC)) = BO = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

b) Dựng $CK \perp DH \Rightarrow CK \perp (SHD) \Rightarrow d(C; (SHD)) = CK$.

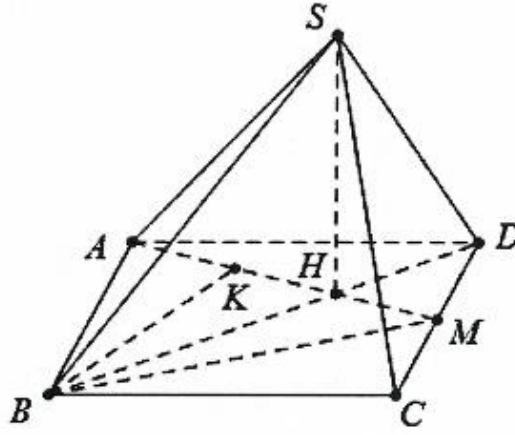
Gọi I là trung điểm của AB thì $H = DI \cap AO$.

$$\text{Khi đó: } CK = \frac{2S_{ICD}}{DI} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD}}{DI} = \frac{25a^2}{\sqrt{DA^2 + AI^2}} = \frac{25a^2}{\sqrt{25a^2 + \left(\frac{5a}{2}\right)^2}} = 2a\sqrt{5}$$

Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng 2, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$.

Gọi M là trung điểm của CD , hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) .

Lời giải



Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle MAB} = 2 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle MAB} = 1$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin ABC = 1 \Rightarrow \sin ABC = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Do đó $ABC = 45^\circ \Rightarrow ADM = 45^\circ$

Áp dụng định lý Cosin trong tam giác ADM , ta có:

$$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2 - 2 \cdot AD \cdot DM \cdot \cos ADM} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Gọi H là giao điểm của AM và $BD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Kẻ BK vuông góc với AM , $K \in AM \Rightarrow BK \perp AM$ (1).

Ta có $(SAM) \cap (SBD) = SH \Rightarrow SH \perp ABCD \Rightarrow SH \perp BK$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow BK \perp (SAM) \Rightarrow d(B; (SAM)) = BK$.

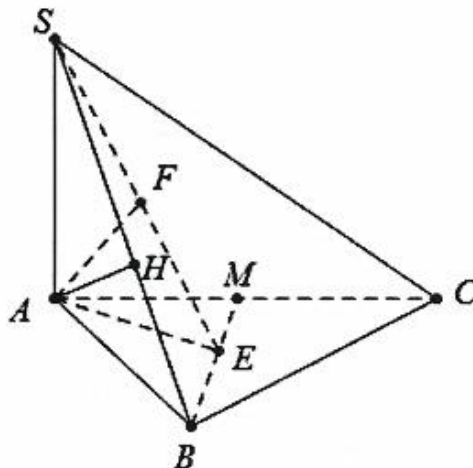
$$\text{Mặt khác } S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot AM \Rightarrow BK = \frac{2 \cdot S_{\triangle MAB}}{AM} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Ví dụ 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

b) Gọi M là trung điểm của AC . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM)

Lời giải



a) Ta có: $AB \perp BC$, mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

$$\text{Dựng } AH \perp SB \Rightarrow \begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC).$$

$$\text{Khi đó } d(A; (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{b) Dựng } AE \perp BM, AF \perp SE \text{ ta có: } \begin{cases} AE \perp BM \\ SA \perp BM \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAE) \Rightarrow BM \perp AF$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} AF \perp SE \\ AF \perp BM \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SBM)$$

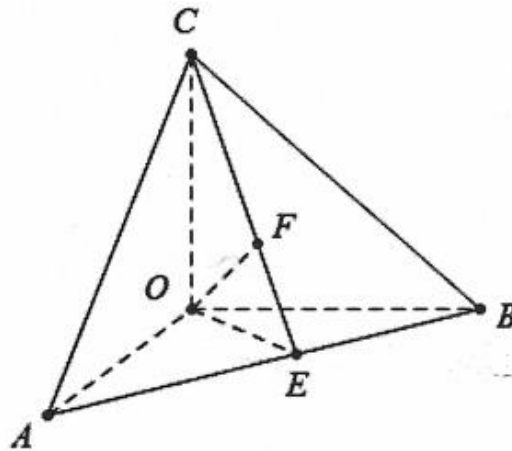
Ta có: $AB = a, AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$. Do BM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên

$$BM = \frac{1}{2} AC = AM = AB = a \Rightarrow \triangle ABM \text{ đều cạnh } a \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } d(A; (SBM)) = \frac{AE \cdot SA}{\sqrt{AE^2 + SA^2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$$

Ví dụ 14: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết $OA = a, OB = b, OC = c$.
Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (ABC)

Lời giải



$$\text{Do } \begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow AB \perp OC.$$

Dựng $OE \perp AB, OF \perp CE$ suy ra $OF \perp BC$.

Khi đó $OF \perp (ABC) \Rightarrow d(O; (ABC)) = OF$.

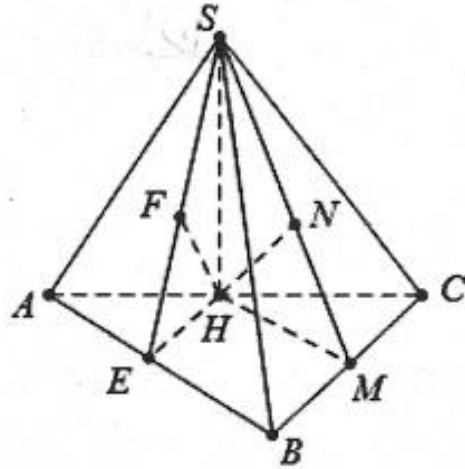
$$\text{Mặt khác: } \frac{1}{OF^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OE^2} \text{ và } \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{d^2(O; (ABC))} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\text{Vậy } d = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của cạnh AC . Biết $SH = a$, tính khoảng cách từ H đến các mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

Lời giải



Dựng $HE \perp AB$ và $HF \perp SE$ thì ta có $d(H; (SAB)) = HF$.

Mặt khác HF là đường trung bình trong tam giác ABC nên $HE = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $d(H; (SAB)) = HF = \frac{HE \cdot SH}{\sqrt{HE^2 + SH^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tương tự dựng $HM \perp BC, HN \perp SM \Rightarrow d(H; (SBC)) = HN$

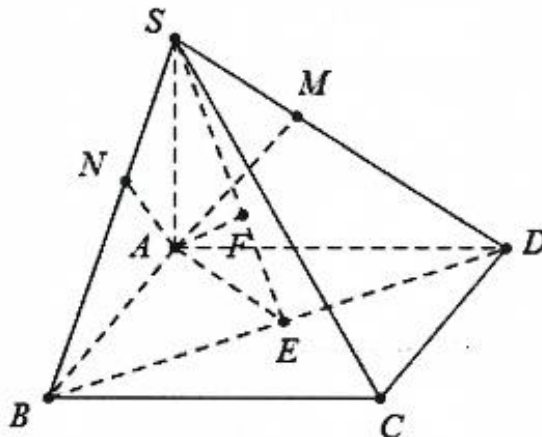
Mặt khác $HM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow HN = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



a) Dựng $AN \perp SB$. Do $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp AN$.

$$\Rightarrow AN \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AN = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}}. \text{ Vậy } d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tương tự } d(A; (SCD)) = AM = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

b) Dựng $AE \perp BD, AF \perp SE$.

Ta chứng minh được $d(A; (SBD)) = d = AF$

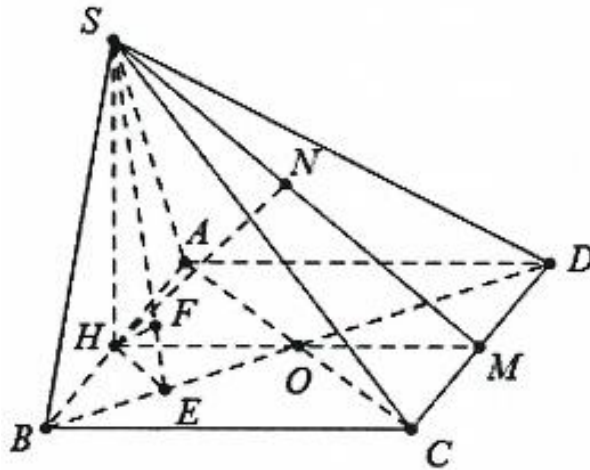
$$\text{Vì } AS \perp AB \perp AD \Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow d = \frac{2a}{3}.$$

Ví dụ 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy trùng với trung điểm H của AB . Biết $SD = 3a$.

a) Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) .

b) Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



a) Ta có: $HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$. Mặt khác $SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = 2a$.

Dựng $HM \perp CD, HN \perp SM \Rightarrow d(H; (SCD)) = HN$

Do $AHMD$ là hình chữ nhật nên $AD = HM = 2a$

$$\text{Khi đó } d(H; (SCD)) = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = a\sqrt{2}$$

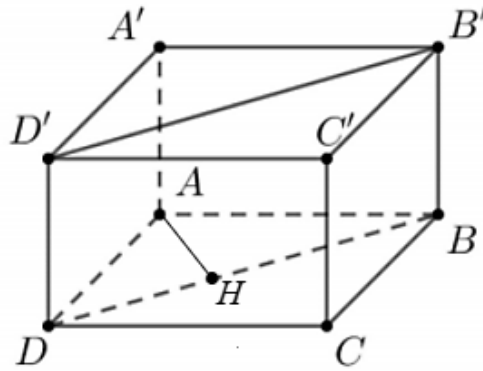
b) Dựng $HE \perp BD, HF \perp SE$ khi đó: $d(H; (SBD)) = HF$

$$\text{Ta có: } AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OA = a\sqrt{2} \Rightarrow HE = \frac{OA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} \Rightarrow HF = \frac{2a}{3} \Rightarrow d(H; (SBD)) = HF = \frac{2a}{3}.$$

Ví dụ 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{3}, AD = a, AA' = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$?

Lời giải



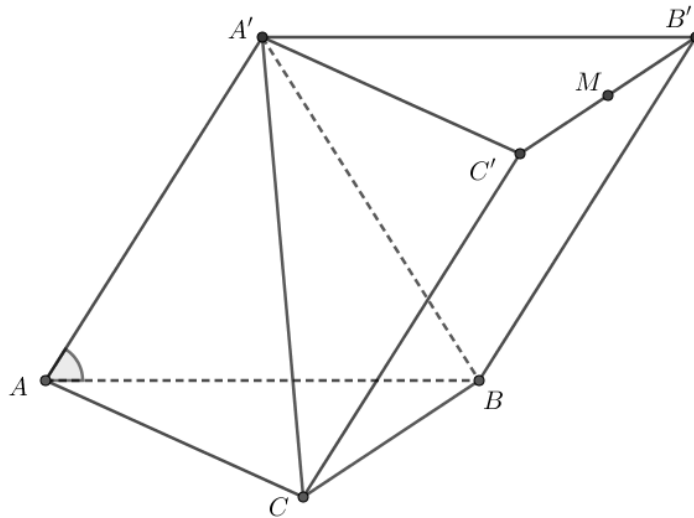
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BD . Khi đó $d(A; (BDD'B')) = AH$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 18: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 6. Tính khoảng cách từ trung điểm M của cạnh $B'C'$ đến mặt phẳng $(A'BC)$?

Lời giải

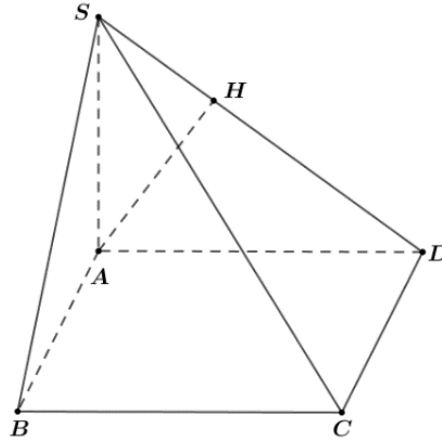


$$\text{Ta có: } d(M, (A'BC)) = d(B', (A'BC)) = d(A, (A'BC)) = 6.$$

$$\text{Vậy } d(M, (A'BC)) = 6..$$

Ví dụ 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2024, $SA \perp (ABCD)$ và mặt bên (SCD) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) ?

Lời giải



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AD \perp CD \\ SD \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (AD, SD) = SDA = 60^\circ$$

Vì $BA \parallel (SCD)$ nên $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Từ A kẻ $AH \perp SD$ thì $AH \perp CD$ (do $CD \perp SA, CD \perp AD$).

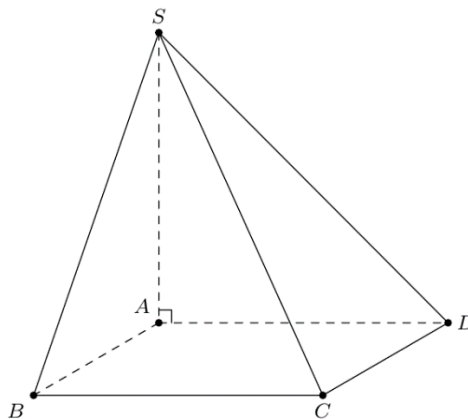
$$\text{Do đó } d(A, (SCD)) = AH = AD \cdot \sin SDA = 2024 \cdot \sin 60^\circ = \frac{2024\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 1012\sqrt{3}.$$

Ví dụ 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ là hình thoi cạnh a . Các mặt phẳng bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, $SB = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng $(ABCD)$?

Lời giải

Ta có hình vẽ



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \text{ suy ra } SA \perp (ABCD) \Rightarrow d(S, (ABCD)) = SA$$

$$\text{Xét } \triangle SAB \text{ vuông tại } A \text{ ta có } SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}.$$

Dạng 3: Khoảng cách giữa các đối tượng song song

Bài toán xác định khoảng cách từ một điểm O đến mặt phẳng (P) .

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ từ đường thẳng này đến đường thẳng kia

- **Bước 1:** Chọn 1 điểm trên đường thẳng này (điểm này thông thường là trung điểm của đoạn thẳng hoặc hai đầu mút của đoạn thẳng)
- **Bước 2:** Tính khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng kia

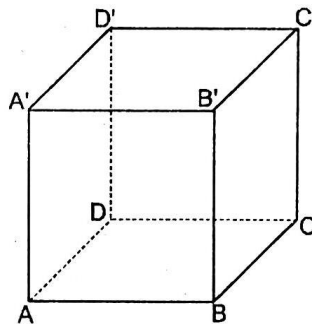
Khoảng cách giữa đường thẳng d song song mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kỳ thuộc đường thẳng d đến mặt phẳng (P)

- **Bước 1:** Chọn 1 điểm trên đường thẳng d (điểm này thông thường là trung điểm của đoạn thẳng hoặc hai đầu mút của đoạn thẳng)
- **Bước 2:** Tính khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng (P) .

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ từ mặt phẳng này đến mặt phẳng kia

- **Bước 1:** Chọn 1 điểm trên mặt phẳng này (điểm này thông thường là trung điểm của đoạn thẳng hoặc hai đầu mút của đoạn thẳng)
- **Bước 2:** Tính khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng kia

Ví dụ 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .



- Tính khoảng cách giữa cạnh $A'D'$ với cạnh BC
- Tính khoảng cách giữa cạnh AA' với mặt phẳng $(BDD'B')$
- Tính khoảng cách giữa mặt phẳng $(ADD'A')$ với $(BCC'B')$

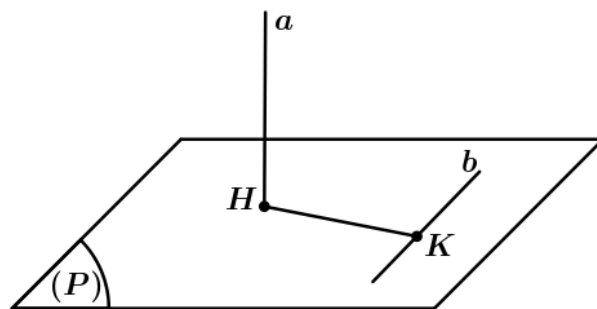
Lời giải

a) Ta có: $A'D' // BC \Rightarrow d(A'D', BC) = d(A', BC) = A'B = a\sqrt{2}$

b) Ta có: $AA' // BB' \Rightarrow AA' // (BDD'B') \Rightarrow d(AA', (BDD'B')) = d(A, (BDD'B')) = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

c) Ta có: $(ADD'A') // (BCC'B') \Rightarrow d((ADD'A'), (BCC'B')) = d(A, (BCC'B')) = AB = a$.

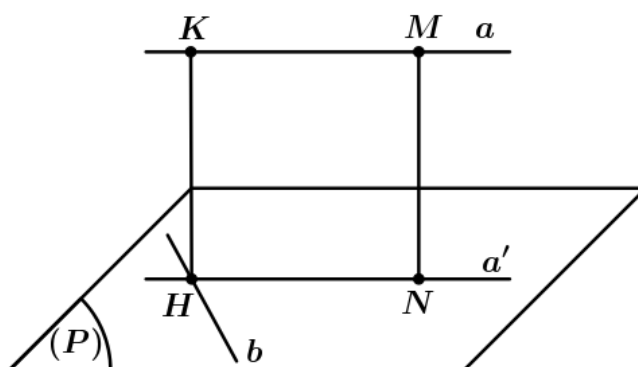
Dạng 4: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau



Cách 1: Khi đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b

- **Bước 1:** Dựng một mặt phẳng $(P) \supset b, (P) \perp a$ tại H .
- **Bước 2:** Trong mặt phẳng (P) dựng $HK \perp b$ tại K .
- **Bước 3:** Đoạn HK là đoạn vuông góc chung của a và b .

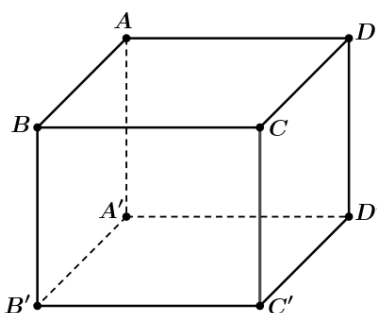
Cách 2:



- **Bước 1:** Dựng $(P) \supset b, (P) \parallel a$.
- **Bước 2:** Dựng a' là hình chiếu của a lên mặt phẳng (P) bằng cách lấy $M \in a$. Sau đó dựng đoạn $MN \perp (P)$. Khi đó a' là đường thẳng đi qua N và song song a .
- **Bước 3:** Gọi $H = a' \cap b$, dựng $HK \parallel MN \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung cần tìm.

Ví dụ 22: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định đoạn vuông góc chung của AA' và CD .

Lời giải

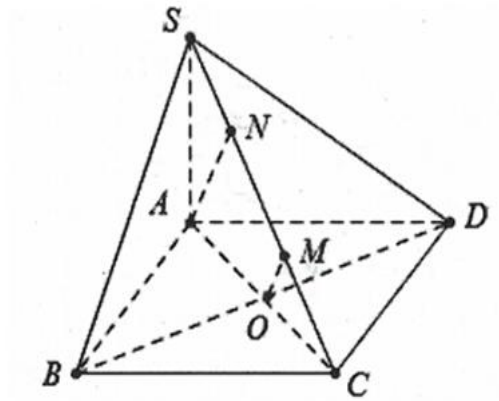


Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp lập phương nên $CD \perp AD, AA' \perp AD$.

Vậy định đoạn vuông góc chung của AA' và CD là AD .

Ví dụ 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC .

Lời giải



Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Do đó $((SBC); (ABCD)) = SBA = 60^\circ$

Suy ra $SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Dựng $OM \perp SC$ khi đó OM là đường vuông góc chung của BD và SC .

Ta có: $\triangle CAS \sim \triangle CMO (g - g) \Rightarrow \frac{SC}{CO} = \frac{SA}{MO} \Rightarrow OM = \frac{SA \cdot OC}{SC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Dạng 4: Toán thực tế vận dụng khoảng cách

Ví dụ 24: Một giá đỡ Tripod ba chân (như hình) đang được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng 40 cm. Biết rằng chiều cao các chân giá đỡ là 1 m, tính chiều cao của giá đỡ so với mặt đất (theo đơn vị mét và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

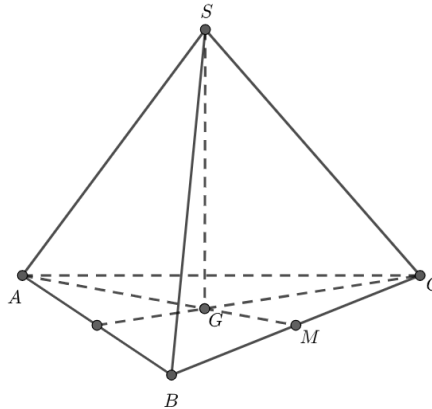


Lời giải

Xét hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = 0,4$ m và $SA = 1$ m. Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ABC . Ta có $SG \perp (ABC)$.

$$AM = \frac{0,4 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2\sqrt{3}}{15}$$

$$\text{Khoảng cách từ giá đỡ so với mặt đất là: } SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{15}\right)^2} = \frac{\sqrt{213}}{15} \approx 0,97 \text{ m.}$$

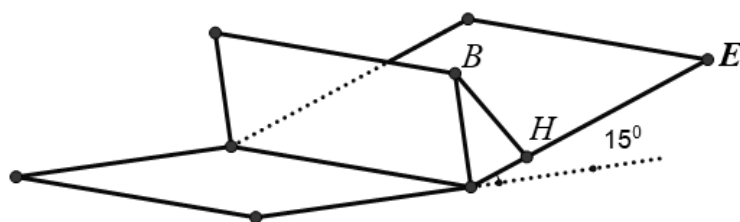


Ví dụ 25: Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung không chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng 2,28m. Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc. Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng 15° so phương nằm ngang. Tính khoảng cách giữa thanh ngang của khung và mặt đường (theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai). Hỏi cầu này có cho phép xe cao 2,21m đi qua hay không? (thường ta thấy ở một số cầu vượt có khung không chế chiều cao)



Lời giải

Gọi B là một điểm nằm trên thanh ngang và H là hình chiếu vuông góc xuống mặt dốc.



Khoảng cách từ B đến mặt phẳng dốc là $BH = 2,28 \cdot \sin 75^\circ \approx 2,2(\text{m})$.

Do đó, không cho phép xe cao 2,21m đi qua.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là

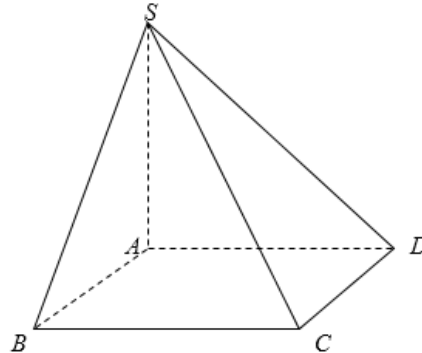
A. $a\sqrt{2}$.

B. a .

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{3a}{4}$.

Lời giải



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $d(S, (ABCD)) = SA = a$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mp (SAC) .

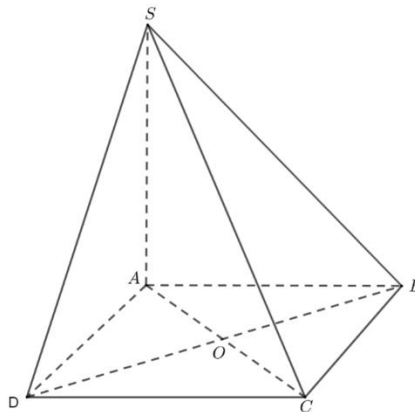
A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải



Gọi $AC \cap BD = \{O\}$

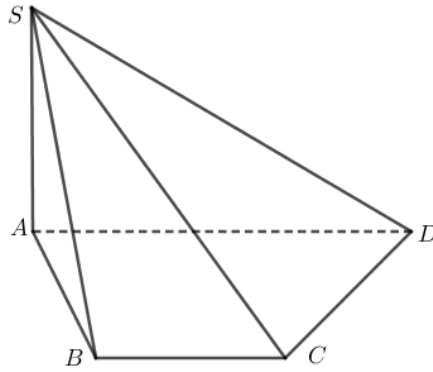
Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BO$

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} BO \perp SA, BO \perp AC \\ SA \subset (SAC), AC \subset (SAC) \\ SA \cap AC = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BO \perp (SAC)$$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = BO = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

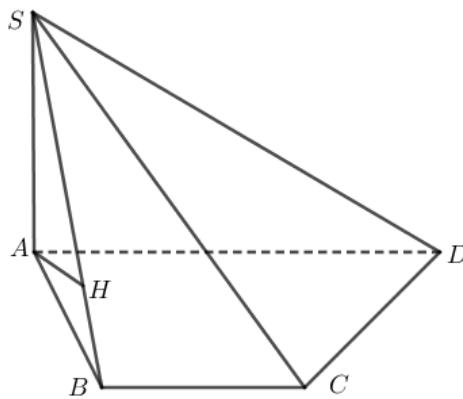
A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

D. $2a$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A trên SB (1).

Ta có: $BC \perp AB, SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (2).

Từ (1), (2) ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

Xét tam giác vuông SAB , ta có: $AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

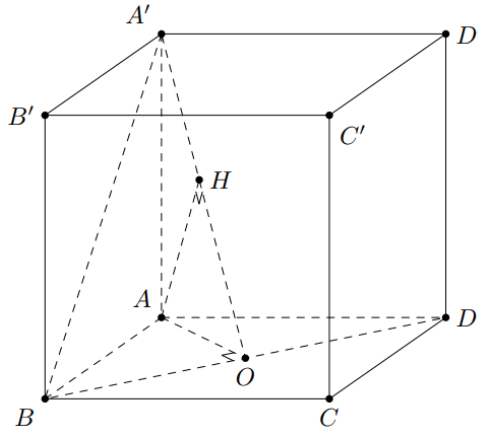
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



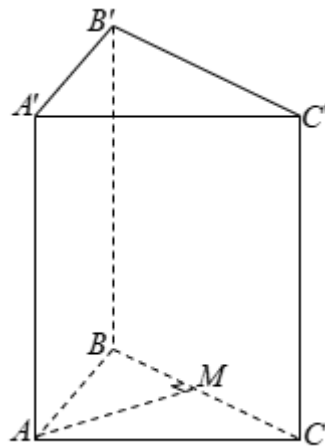
Có $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Khi đó $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{OA^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(A; (A'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết $AB = AA' = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. a .

Lời giải



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao trong tam giác đều cạnh a)

Ta có: $AM \perp BC$ (do $\triangle ABC$ đều)

Mặt khác: $AM \perp BB'$ (do lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều)

Suy ra $AM \perp (BCC'B') \Rightarrow d(A, (BCC'B')) = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB=1$; $SA \perp (ABC)$, $SA=1$. Khoảng cách từ điểm A đến mp (SBC) bằng

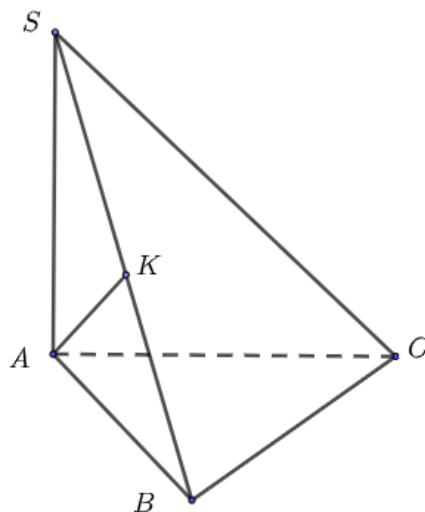
A. $\sqrt{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải



$\triangle SAB$ dựng $AK \perp SB$

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Có $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK$

Vậy $AK \perp (SBC), d(A, (SBC)) = AK$.

$$\text{Có } SA \cdot AB = AK \cdot SB \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

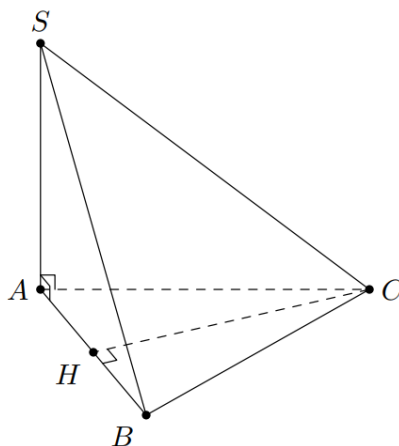
A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

B. a .

C. $2a$.

D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB . Ta có $CH \perp (SAB)$ nên $d(C, (SAB)) = CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) .

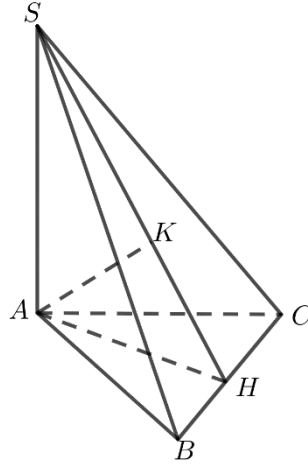
A. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

B. $d = a$.

C. $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Vẽ $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow BC \perp (SAH)$.

Vẽ $AK \perp SH$ tại K mà $AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (SBC)$ tại K .

Do đó $AK = d(A, (SBC))$. Do H là trung điểm của BC nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy } AK = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Câu 9: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

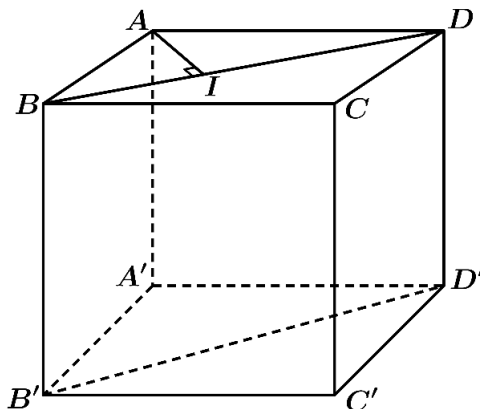
A. $2a$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. a .

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Kẻ $AI \perp BD$ tại I (1).

Do $BB' \perp (ABCD)$ nên $BB' \perp AI$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AI \perp (BDD'B')$ hay $d(A, (BDD'B')) = AI$.

Xét tam giác vuông ABD , ta có $AI = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(A, (BDD'B')) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = AC = AD = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng

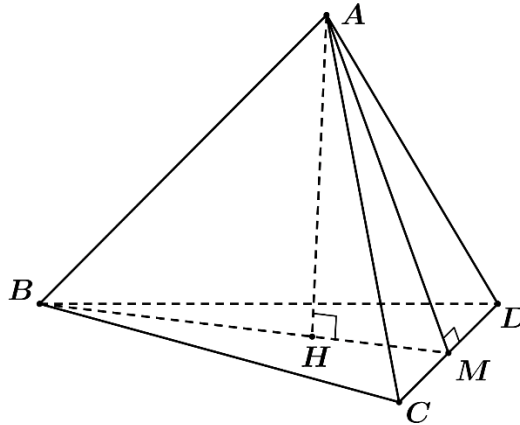
A. $a \frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $a \frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của DC

Ta có: $\begin{cases} AM \perp DC \\ AB \perp DC \end{cases} \Rightarrow (AMB) \perp DC \Rightarrow (AMB) \perp (BCD)$ mà $(AMB) \cap (BCD) = BM$

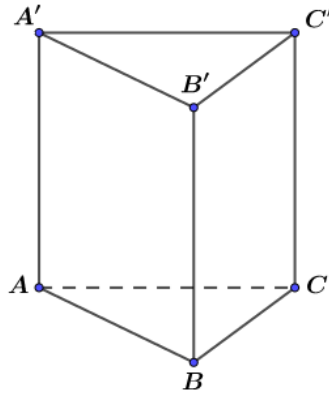
Từ A dựng $AH \perp BM \Rightarrow d(A, (BCD)) = AH$.

Trong $\triangle ADC$ có $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2}$

Trong $\triangle ABM$ có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(A, (BCD)) = a \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và diện tích của hình vuông $ABB'A'$ bằng $12(\text{cm}^2)$



Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng

- A. 6. **B.** $2\sqrt{3}(cm)$. C. 2. D. $3\sqrt{2}(cm)$.

Lời giải

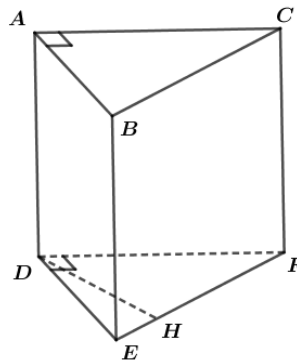
Do ABC là tam giác vuông cân tại B và diện tích của hình vuông $ABB'A'$ bằng $12(cm^2)$ nên $AB = BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Ta có $CB \perp (ABB'A')$ nên $d(C, (ABB'A')) = CB = 2\sqrt{3}(cm)$

Câu 12: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.DEF$ có đáy là tam giác vuông tại A , biết $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng $(BCFE)$ bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải



Trong (DEF) , gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên EF .

$$\Rightarrow \begin{cases} DH \perp EF \\ DH \perp BE \\ EF \cap BE = E \\ EF, BE \subset (BCFE) \end{cases} \Rightarrow DH \perp (BCFE)$$

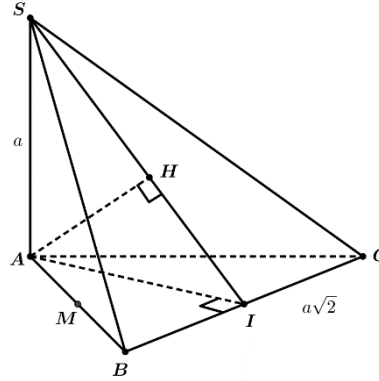
$$\text{Tam giác } DEF \text{ vuông tại } D, DH \text{ là đường cao} \Rightarrow DH = \frac{DE \cdot DF}{\sqrt{DE^2 + DF^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(D, (BCFE)) = DH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC . Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AI \perp BC$.

Theo giả thiết $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA$. Do đó $BC \perp (SAI)$.

Trong mặt phẳng (SAI) , kẻ $AH \perp SI$ (1). Mà $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

$$\text{Ta có } AI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad AH = \frac{AI \cdot AS}{\sqrt{AI^2 + AS^2}} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)) = \frac{1}{2} AH = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\sqrt{2}a$. B. $2a$. C. a . D. $2\sqrt{2}a$.

Lời giải

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CB$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB).$$

$$\text{Do đó } d(C, (SAB)) = CB = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{2}a.$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABC)$,

$SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

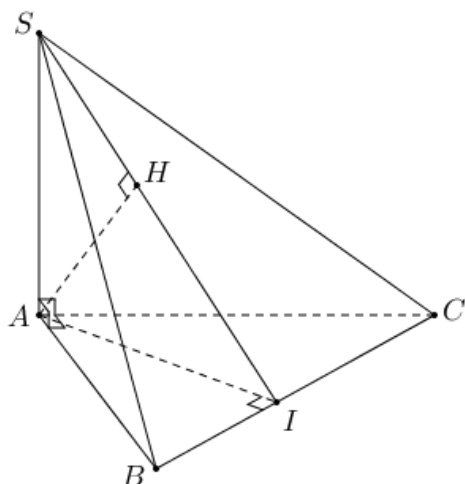
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải



Gọi I là hình chiếu của A trên BC , H là hình chiếu của A trên SI .

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ AI \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH \left. \begin{array}{l} SI \perp AH \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

Do đó: $d(A, (SBC)) = AH$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$

Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, cạnh bên $SD = \sqrt{6}a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

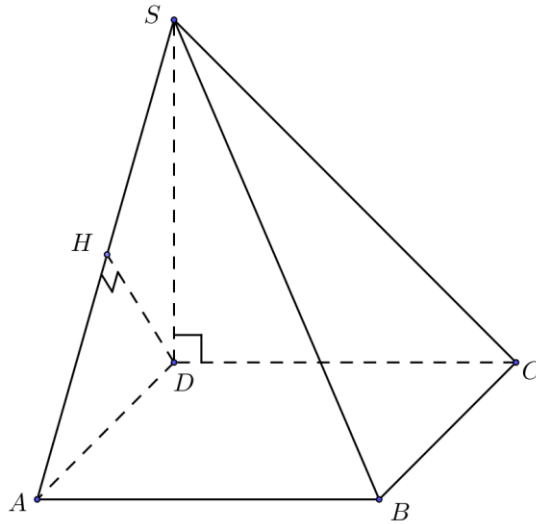
A. $\sqrt{3}a$.

B. $\sqrt{2}a$.

C. $2a$.

D. a .

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp SD \\ AB \perp AD \\ SD \cap AD = D \text{ trong } (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$$

Vẽ $DH \perp SA$ tại H trong mặt phẳng (SAD)

$$\text{Ta có } \begin{cases} DH \perp AB \\ DH \perp SA \\ AB \cap SA = A \text{ trong } (SAB) \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB)$$

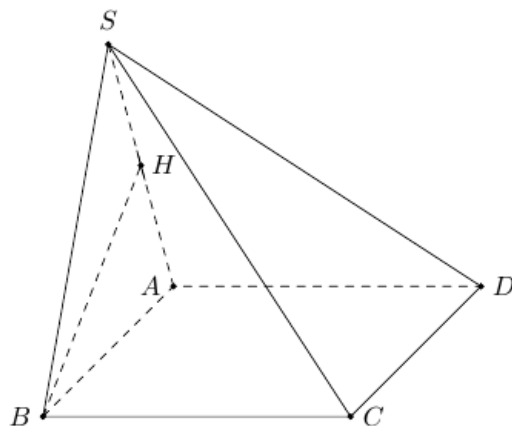
Vì $CD \parallel (SAB)$ nên $d(SB; CD) = d((SAB); CD) = d((SAB); D) = DH$.

$$\square SAD \text{ vuông tại } D \text{ với đường cao } DH \text{ có } DH = \frac{SD \cdot DA}{\sqrt{SD^2 + DA^2}} = \frac{3\sqrt{2}a^2}{3a} = a\sqrt{2}$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, BC = a$, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa BC và SD là

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} BC // AD \\ AD \subset (SAD) \Rightarrow BC // (SAD), \text{ do đó } d(BC, SD) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)). \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases}$$

Tam giác SAB đều, gọi H là trung điểm SA thì $BH \perp SA$ (1).

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD) \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAD)$, do đó $d(B, (SAD)) = BH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CB và SA .

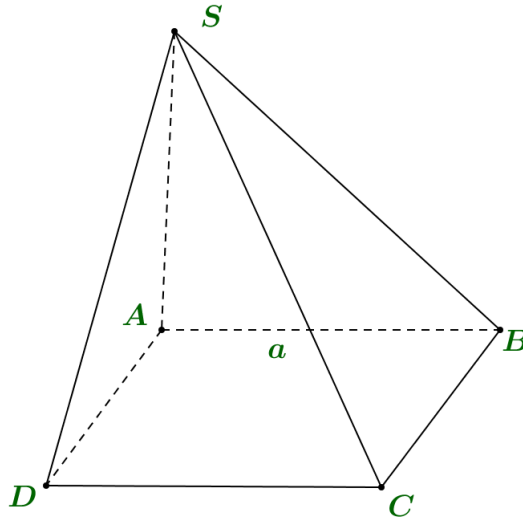
A. $\frac{a}{2}$.

B. $2a$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. a .

Lời giải



Ta có do $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp BC$. Mặt khác $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$

Từ đó ta có AB là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng CB và SA .

Vậy $d(BC, SA) = a$.

Câu 19: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD .

A. $a\sqrt{3}$.

B. $a\sqrt{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Gọi N, K, I, E lần lượt là trung điểm của SB, AB, MN và CD .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (MCD) \cap (SAB) = MN \\ IE \perp MN \\ SK \perp MN \\ (MCD) \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow EI \perp SK \Rightarrow \Delta SEK \text{ đều} \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có } OM \parallel SC \Rightarrow OM \parallel (SBC) \Rightarrow d(OM, SB) = d(O, (SBC)) = OJ$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SOH : OJ = \frac{SO \cdot OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(OM, SB) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $SBD = 60^\circ$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO .

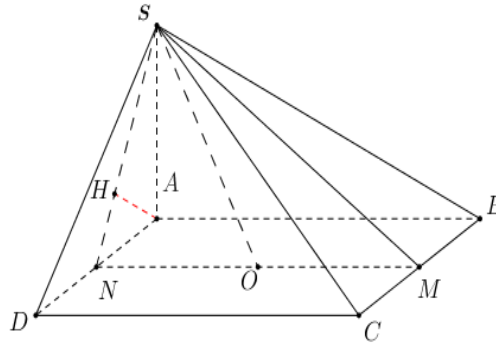
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . Dựng $AH \perp SN$

$$\text{Khi đó } d(AB, SO) = d(AB, (SMN)) = d(A, (SMN)) = AH$$

Do tam giác SBD có $SBD = 60^\circ$ và $SB = SD$ nên SBD là tam giác đều

$$\text{Suy ra } SD = BD = a\sqrt{2}, \text{ do đó } SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{5}}{5} = d(AB, SO).$$

Câu 22: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B , $AB = AA' = 2a$, M là trung điểm BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng

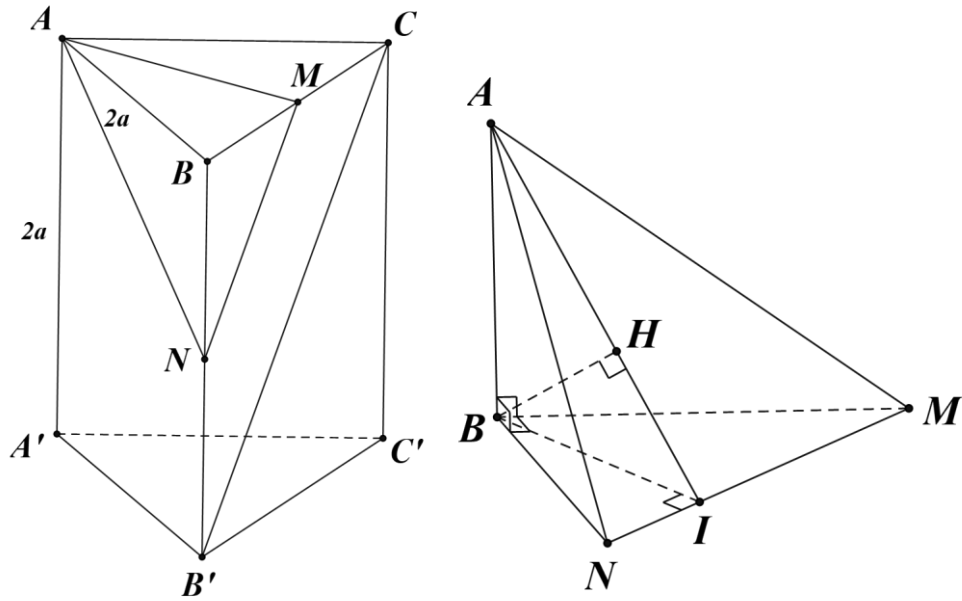
A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{2a}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm $BB' \Rightarrow MN \parallel B'C \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$.

Khi đó $d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

Ta có $BC \cap (AMN) = M$ và $MB = MC$ nên $d(C, (ABM)) = d(B, (ABM))$.

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ABM) . Tứ diện $BAMN$ có BA, BM, BN đôi một

vuông góc nên: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2}$

$$AB = 2a = BC.$$

$$BN = \frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2}AA' = \frac{2a}{2} = a.$$

$$BM = \frac{1}{2}BC = a.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow h^2 = \frac{4a^2}{9} \Rightarrow h = \frac{2a}{3}.$$

Câu 23: Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D , $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SD = a\sqrt{2}$. Biết điểm M di động trên đường thẳng CD , tìm giá trị nhỏ nhất khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng SA .

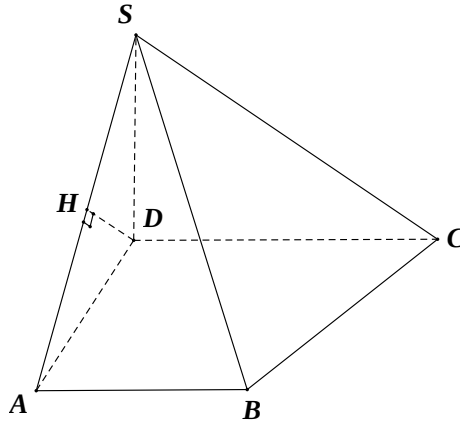
A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}.$

B. $\frac{a}{\sqrt{2}}.$

C. $a\sqrt{2}.$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Lời giải



Dễ thấy khoảng cách này bằng khoảng cách từ điểm D đến đường thẳng SA .

Trong tam giác vuông SAD ta có:

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow DH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$; $SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC là

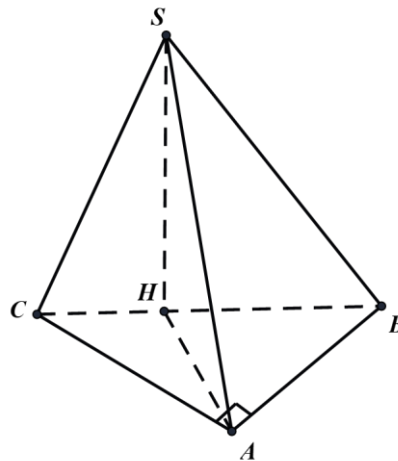
A. $a\sqrt{2}$.

B. $a\sqrt{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Ta có vì $SA = SB = SC$ nên $\Rightarrow S$ nằm trên đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với đáy. Mà $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là trung điểm H của BC . Vậy S nằm trên đường thẳng đi qua H vuông góc với (ABC) .

Mà góc giữa đường thẳng SA và (ABC) là $60^\circ \Rightarrow \angle SAH = 60^\circ$

$\triangle ABC$ vuông cân tại A có $AB = 2a \Rightarrow BC = 2a\sqrt{2}$. Mà H là trung điểm của BC
 $\Rightarrow AH = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$

Xét tam giác vuông SHA ta có: $SH = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$

Vậy khoảng cách từ S đến đường thẳng BC là $a\sqrt{6}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE :

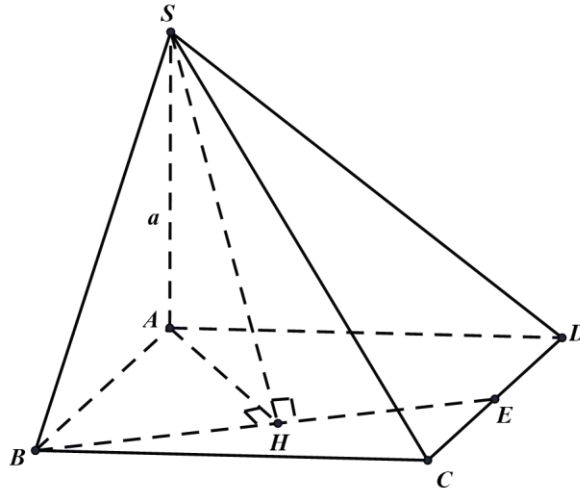
A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải



$SA \perp (ABCD)$, trong mặt phẳng $(ABCD)$ nếu dựng $AH \perp BE$ tại H thì $SH \perp BE$ (định lý 3 đường vuông góc). Tức là khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE bằng đoạn SH .

$$\text{Ta có: } S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot FE = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} AH \cdot BE$$

$$\text{Mà } BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

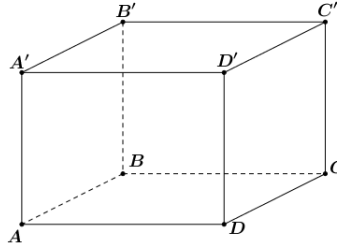
$$\text{Nên } AH = \frac{a^2}{BE} = \frac{2a}{\sqrt{5}}, \text{ mà } \triangle SAH \text{ vuông tại } A, \text{ nên:}$$

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy } d(S, BE) = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

D**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông cạnh a .



- Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng a .
- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng a .
- Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng độ dài đoạn thẳng BD .
- Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (BDC') bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a) Đúng: Do hình hộp có 6 mặt là hình vuông nên là hình lập phương.

Khi đó $A'A \perp (ABCD) \Rightarrow d(A, (ABCD)) = A'A = a$.

b) Sai: Ta có $AC \perp (BDD'B') \Rightarrow d(A, (BDD'B')) = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

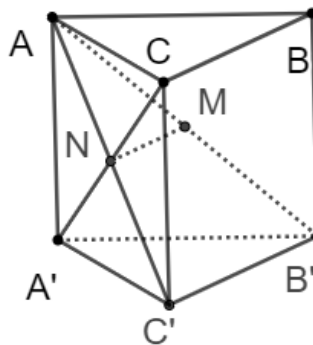
c) Sai: Ta có $DC \perp (BCC'B')$ nên $d(D, (BCC'B')) = DC$.

d) Đúng: Ta có $CA' \perp (BDC')$ và do $CC'; CB; CD$ đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2(C, (BDC'))} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{3a^2} \Rightarrow d(C, (BDC')) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 2: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB' và AC' . Các khẳng định sau **ĐÚNG** hay **SAI**?

- Khoảng cách giữa $(A'B'C')$ và (ABC) bằng $2a$.
- Khoảng cách giữa BC và $(A'B'C')$ bằng a .
- Khoảng cách giữa BC và $(AB'C')$ bằng khoảng cách giữa A' và $(AB'C')$.
- Khoảng cách MN và $(A'B'C')$ bằng a .

Lời giải

a) Đúng: Ta có $(A'B'C') \parallel (ABC)$ nên $d((A'B'C'), (ABC)) = AA' = 2a$.

b) Sai: Ta có $BC \parallel (A'B'C')$ nên $d(BC, (A'B'C')) = d(B, (A'B'C')) = B'B = 2a$.

c) Đúng: Ta có $BC \parallel (AB'C')$ nên $d(BC, (AB'C')) = d(C, (AB'C'))$.

$(AB'C')$ qua trung điểm của $A'C$ nên $d(C, (AB'C')) = d(A', (AB'C'))$.

d) Đúng: Ta có $A'C' \subset (A'B'C')$.

$MN \parallel (A'B'C')$ nên $d(MN, (A'B'C')) = d(M, (A'B'C')) = \frac{1}{2} d(A, (A'B'C')) = \frac{1}{2} AA' = a$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SD và O lên cạnh SC .

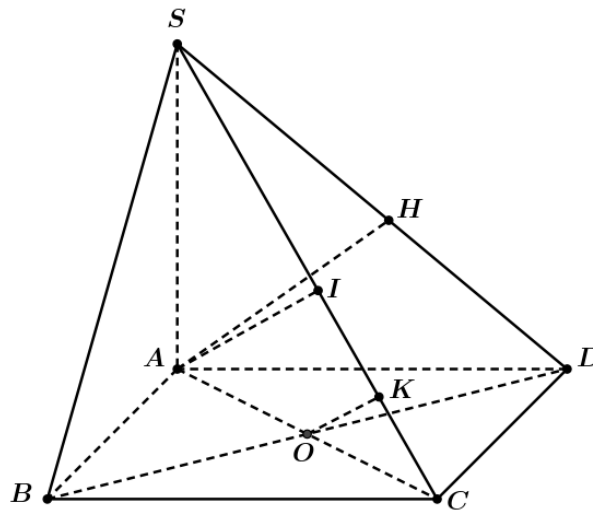
a) OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

b) Đoạn vuông góc chung của SD và AB là AD .

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OK$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và $OK \perp SC$ thì OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

b) Sai: Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH$. Mặt khác, $AH \perp SD$. Vậy AH là đoạn vuông góc chung của SD và AB .

c) Đúng: AH là đoạn vuông góc chung của SD và AB . Tam giác SAD vuông cân tại A có đường cao AH nên $AH = \frac{1}{2} SD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(AB, SD) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

d) Sai: Ta có OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

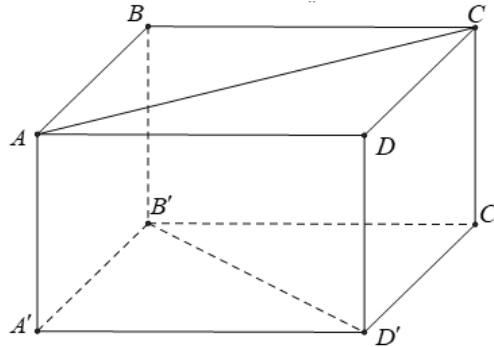
Khi đó $d(BD, SC) = OK = \frac{1}{2} AI$ (I là trung điểm của SC).

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Vậy $d(BD, SC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 4: Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=3, AD=4, A'A=5$.

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng 5.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng 4.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'A$ và DC là khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'BB')$ và mặt phẳng $(CDC'D')$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng CB và $B'D'$ là 3.

Lời giải

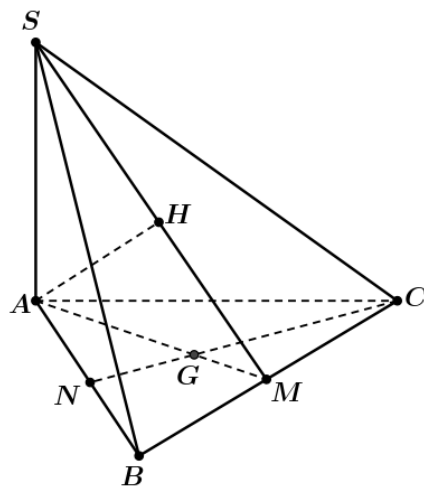


- Đúng: Ta có $(ABCD) // (A'B'C'D')$, $AC \subset (ABCD)$; $B'D' \subset (A'B'C'D')$
 $\Rightarrow d(AC, B'D') = d(AC, (A'B'C'D')) = d(A, (A'B'C'D')) = AA' = 5$.
- Đúng: Ta có $(ABA'B') // (CDC'D')$, $AB \subset (ABA'B')$; $DD' \subset (CDC'D')$.
 $\Rightarrow d(AC, B'D') = d(AB, (CDC'D')) = d(A, (CDC'D')) = AD = 4$.
- Đúng: Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'A$ và DC là khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'BB')$ và mặt phẳng $(CDC'D')$.
- Sai: Ta có $(ABCD) // (A'B'C'D')$, $BC \subset (ABCD)$; $B'D' \subset (A'B'C'D')$
 $\Rightarrow d(AC, B'D') = d(BC, (A'B'C'D')) = d(B, (A'B'C'D')) = BB' = 5$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh a .

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.
- Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải



a) Sai: M là trung điểm BC .

Tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AM$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Sai: N là trung điểm AB . Tam giác ABC đều nên $CN \perp AB$ và $CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CN$. Vậy $CN \perp (SAB)$.

Suy ra $d(C, (SAB)) = CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Sai: Kẻ $AH \perp AM$ tại H

Ta có $BC \perp AM$; $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Vậy $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $AH \perp (SBC)$

Suy ra $d(A, (SBC)) = AH$

Tam giác SAM vuông tại A có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{7}{3a^2}$

Suy ra $AH^2 = \frac{3a^2}{7} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

d) Đúng: Ta có $\frac{GM}{AM} = \frac{d(G, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow d(G, (SBC)) = \frac{1}{3} d(A, (SBC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{7} = \frac{a\sqrt{21}}{21}$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của CD .

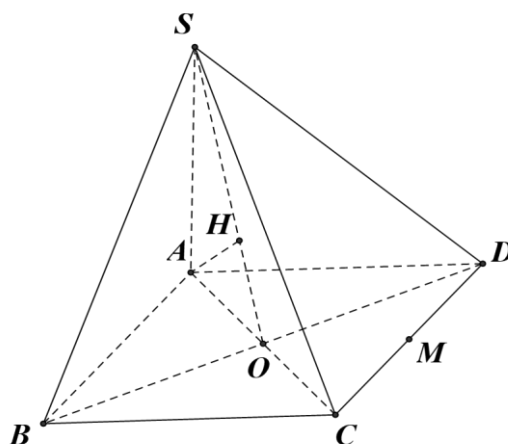
a) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAB) là độ dài đoạn DA .

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là độ dài đoạn DA .

c) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) là $\frac{a}{3}$

d) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBD) là $\frac{a}{3}$

Lời giải



a) Đúng: $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB) \Rightarrow d(A, (SAB)) = DA.$

b) Đúng: $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB) \Rightarrow d(SB, CD) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DA$

c) Sai: Gọi O là tâm đáy, $AC \cap (SBD) = O$, O là trung điểm AC

$$\Rightarrow d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SO . Khi đó $AH \perp SO$ (1)

Mặt khác $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ mà $AH \subset (SAC).$

$$\Rightarrow AH \perp BD \text{ (2)}$$

Mà SO cắt BD trong mặt phẳng (SBD) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A, (SBD)) = AH.$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SOA ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{2a^2} = \frac{9}{4a^2}$

$$\Rightarrow AH = \frac{2a}{3}.$$

d) Đúng: Vì M là trung điểm của CD .

$$d(M, (SBD)) = \frac{1}{2} d(C, (SBD)) = \frac{1}{2} d(A, (SBD)) = \frac{1}{2} AH = \frac{a}{3}$$

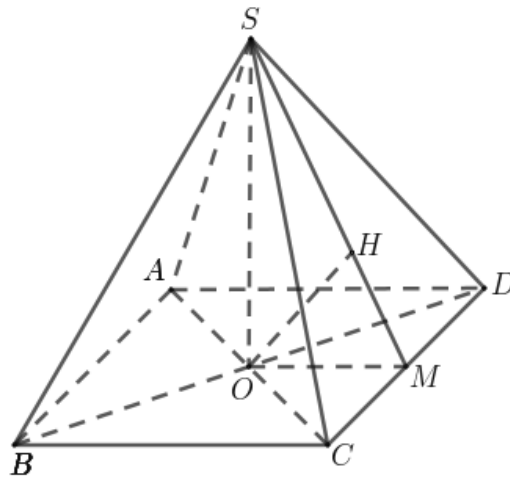
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$, $SO = a$.

a) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBD) bằng a .

b) Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng a .

- c) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- d) Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



- a) Sai: Ta có: $D \in (SBD) \Rightarrow d(D, (SBD)) = 0$.
- b) Đúng: Ta có: $O \in (ABCD)$, $SO \perp (ABCD) \Rightarrow d(S, (ABCD)) = SO = a$.
- c) Đúng: Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BO$ và $BO \perp AC \Rightarrow BO \perp (SAC) \Rightarrow d(B, (SAC)) = BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

d) Sai: Gọi M là trung điểm CD , H là hình chiếu của O trên SM .

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp OM \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OH \quad (1).$$

Lại có $OH \perp SM \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (SCD)$ nên $d(O, (SCD)) = OH$.

Xét tam giác SOM vuông tại O , đường cao OH , ta có

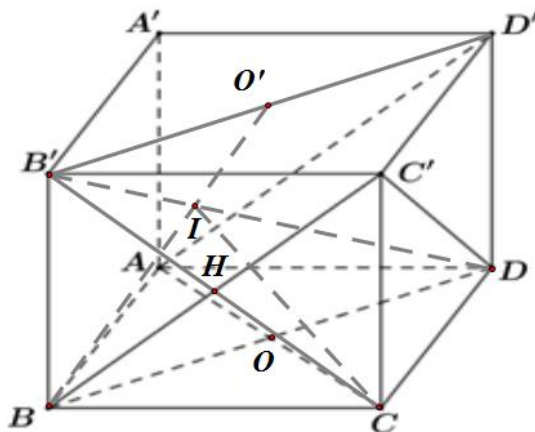
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Suy ra } d(O, (SCD)) = OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Gọi O, O' là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$, I là giao điểm của BO' và DB' .

- a) Khoảng cách giữa hai mặt $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng 2.
- b) Khoảng cách từ C đến $(BB'D'D)$ bằng đoạn CO .
- c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và DC' lớn hơn 2.
- d) Khoảng cách từ B đến (CDI) bằng đoạn $2\sqrt{2}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có $\begin{cases} AA' \perp (ABCD) \\ AA' \perp (A'B'C'D') \end{cases} \Rightarrow d((ABCD), (A'B'C'D')) = AA' = 2.$

b) Đúng: Ta có $\begin{cases} CO \perp BD \\ CO \perp BB' \end{cases} \Rightarrow CO \perp (BB'D'D) \Rightarrow d(C, (BB'D'D)) = CO.$

c) Sai: Ta có $AD' \parallel BC' \Rightarrow AD' \parallel (BDC') \Rightarrow d(AD', DC') = d(AD', (BDC')) = d(A, (BDC')) = d(C, (BDC')).$

$$\text{Mà } \frac{1}{d^2(C, (BDC'))} = \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow d(C, (BDC')) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(AD', DC') = \frac{2\sqrt{3}}{3} < 2.$$

d) Sai: Ta có $I \in DB' \Rightarrow (CDI) \equiv (CDB') \Rightarrow d(B, (CDI)) = d(B, (CDB')).$

$$\text{Gọi } BC' \cap CB' = H \Rightarrow \begin{cases} BH \perp CB' \\ BH \perp CD \end{cases} \Rightarrow BH \perp (CDB') \Rightarrow d(B, (CDB')) = BH.$$

$$\text{Vậy } d(B, (CDI)) = BH = \frac{BC'}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

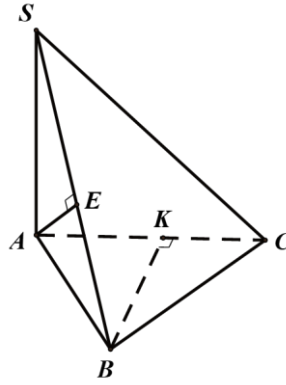
a) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng CB

b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

c) Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

d) Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách d giữa SM và BC là $\frac{\sqrt{17}a}{17}$.

Lời giải



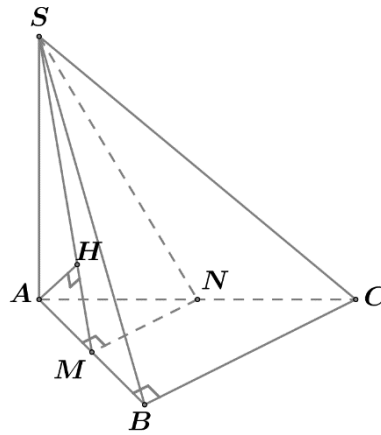
a) Đúng : Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow d(C; (SAB)) = CB$. Vậy a) đúng.

b) Đúng : Kẻ $AE \perp SB$. Khi đó $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC)$
 $\Rightarrow AE$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

$$\text{Ta có } \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AE^2 = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow AE = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

c) Sai: Kẻ $BK \perp AC$. Khi đó $BK \perp SA \Rightarrow BK \perp (SAC)$, và K là trung điểm của AC
 $\Rightarrow BK$ là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

$$\text{Ta có } BK = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



d) Sai: Gọi N là trung điểm của AC .

$$\text{Ta có } BC \parallel (SMN) \Rightarrow d(BC, SM) = d(BC, (SMN)) = d(B, (SMN)) = d(A, (SMN)).$$

$$\text{Kẻ } AH \perp SM, H \in SM, \text{ ta có } AH \perp (SMN) \Rightarrow d(A, (SMN)) = AH.$$

$$\text{Ta có } AM = \frac{a}{2}.$$

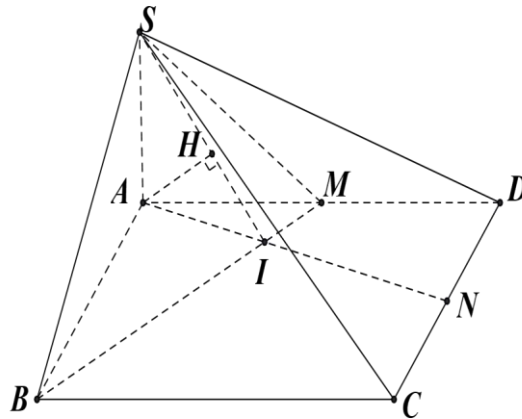
$$\text{Xét tam giác } SAM \text{ vuông tại } A \text{ có } AH \text{ là đường cao, suy ra } AH = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{2a\sqrt{17}}{17}.$$

$$\text{Vậy } d(BC, SM) = \frac{2a\sqrt{17}}{17}.$$

Câu 10: Cho hình chóp $SA = a, SA \perp (ABCD)$, đáy là hình vuông. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, DC , góc giữa (SBM) với $(ABCD)$ là 30° .

- Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng a
- Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SMD) là BM
- Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng nửa độ dài cạnh BD
- Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



- Đúng: Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng a là đúng vì $SA = a, SA \perp (ABCD)$
- Sai: $BA \perp (SAD)$ mà $(SMD) \subset (SAD)$ nên khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SMD) là BA
- Đúng: $DB \perp AC$ và $DB \perp SA$ nên $DB \perp (SAC)$ suy ra khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng nửa độ dài cạnh BD
- Đúng: Gọi I là giao điểm của AN và BM , vì $ABCD$ là hình vuông nên AN và BM vuông góc nhau tại I (ta có thể chứng minh bằng cách chứng minh $\triangle ADN = \triangle BAM$ ($c - g - c$) để suy ra $\angle AMI + \angle MAI = \angle AMI + \angle ABM = 90^\circ$).

Khi đó $BM \perp AN, BM \perp SA$ nên $BM \perp (SAI)$ hay $BM \perp SI$. Do đó góc giữa (SBM) và $(ABCD)$ là góc $\angle SIA = 30^\circ$ suy ra $\angle ASI = 60^\circ$.

Vẽ $AH \perp SI$ tại H khi đó ta có $AH \perp (SBM)$ (vì $AH \perp SI$ và $AH \perp BM$) và trong $\triangle SAH$ có

$$AH = SA \cdot \sin \angle ASI = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ hay } d(A, (SBM)) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Mặt khác lại có $AD \cap (SBM) = M$ nên

$$d(D, (SBM)) = \frac{DM}{AM} \cdot d(A, (SBM)) = d(A, (SBM)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

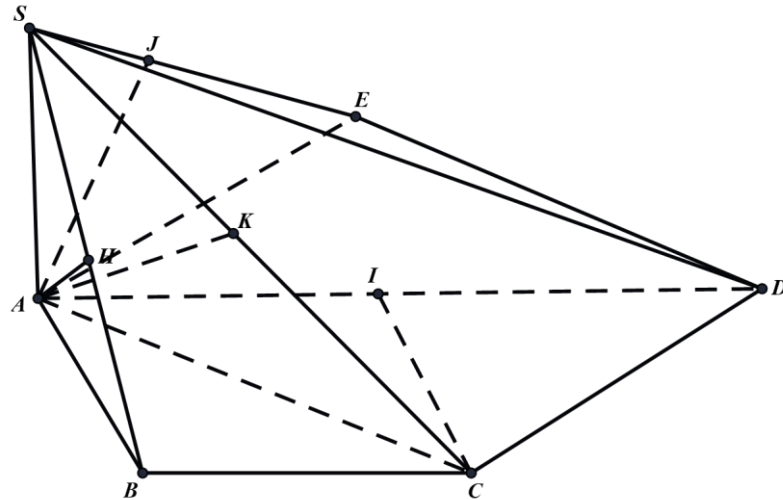
Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $SA \perp (ABCD); SA = a; AB = BC = a; AD = 2a$

- Khoảng cách từ điểm D đến cạnh BC là $a\sqrt{2}$.
- Khoảng cách từ điểm A đến (SBC) là a .

c) Khoảng cách từ điểm A đến (SCD) là $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



a) Sai: Khoảng cách từ điểm D đến cạnh BC là $a\sqrt{2}$.

Để thấy $AD \parallel BC$ nên khoảng cách $d(D; BC) = d(A; BC) = AB = a$

b) Sai: Khoảng cách từ điểm A đến (SBC) là a .

Dựng đường cao AH của tam giác SAB , suy ra được $AH \perp (SBC)$ nên

$$d(A, (SBC)) = AH = \sqrt{\frac{AS^2 \cdot AB^2}{AS^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

c) Sai: Khoảng cách từ điểm A đến (SCD) là $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Gọi I là trung điểm AD , nhận thấy tứ giác $ABCI$ là hình vuông cạnh a ,

Xét trong tam giác ACD có CI là đường trung tuyến và $CI = a = IA = ID$, từ đó suy ra tam giác ACD vuông tại C .

Dựng đường cao AK của tam giác SAC , dễ dàng chứng minh được $AK \perp (SCD)$

$$\text{Suy ra } d(A, (SCD)) = AK = \sqrt{\frac{AC^2 \cdot AS^2}{AC^2 + AS^2}} = \sqrt{\frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot a^2}{(a\sqrt{2})^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

d) Đúng: Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Dựng hình chữ nhật $ACDE$, ta có $AC \parallel DE$ nên $AC \parallel (SDE)$.

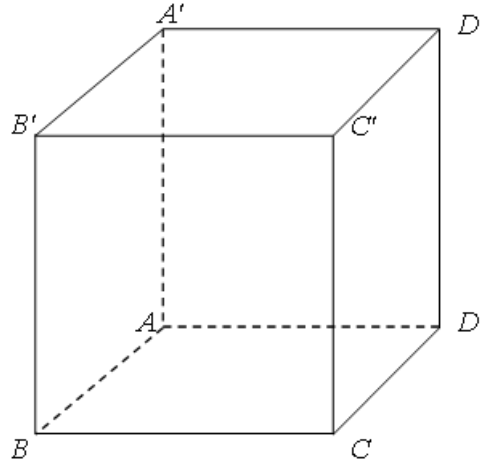
$$AE = CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Do đó $d(AC, DE) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE))$.

Dựng đường cao AJ trong tam giác SAE , ta chứng minh được $AJ \perp (SDE)$.

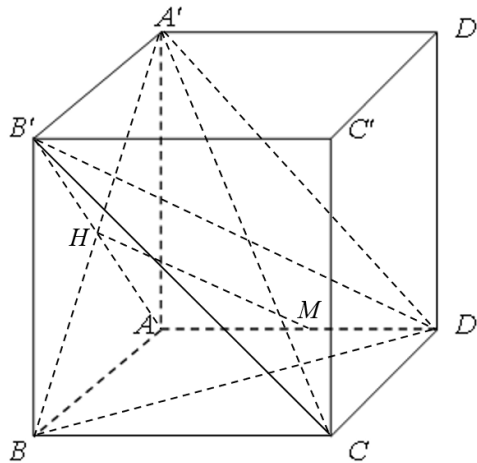
$$\text{Từ đó suy ra } d(A, (SDE)) = AJ = \frac{\sqrt{AE^2 \cdot AS^2}}{\sqrt{AE^2 + AS^2}} = \frac{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 \cdot a^2}}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a .



- Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $A'B$ bằng $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.
- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng $\frac{a}{2}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'D$ bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải



$ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương có các cạnh bằng a nên có tất cả các mặt là hình vuông cạnh a . Gọi H là tâm của hình vuông $ABB'A'$ và M là trung điểm của cạnh AD .

- Đúng: $d(A, A'B) = AH = \frac{1}{2} AB' = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.
- Đúng: $d(A, (A'BD)) = h$ thì $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{3}{a^2}$. Do đó $h = \frac{\sqrt{3}}{3} a$.
- Sai: $A'B \subset (A'BD)$.

$B'C // A'D$, $A'D \subset (A'BD)$ nên $B'C // (A'BD)$.

Do đó $d(A'B, B'C) = d(B'C, (A'BD)) = d(C, (A'BD))$.

Mặt khác $AC \cap (A'BD) = N$ là trung điểm của AC nên $d(C, (A'BD)) = d(A, (A'BD)) = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

Do đó $d(A'B, B'C) = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

d) Sai: $A'B \subset (A'BM)$.

$B'D // HM$, $HM \subset (A'BM)$ nên $B'D // (A'BM)$.

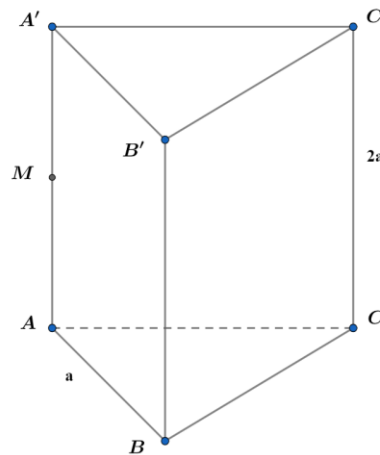
Do đó $d(A'B, B'D) = d(B'D, (A'BM)) = d(D, (A'BM))$.

Mặt khác $AD \cap (A'BM) = M$ là trung điểm của AD nên $d(D, (A'BM)) = d(A, (A'BM)) = k$

Khi đó $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{6}{a^2}$.

Do đó $d(A'B, B'C) = \frac{\sqrt{6}}{6}a$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A = 2a$. Gọi M là trung điểm của AA' .



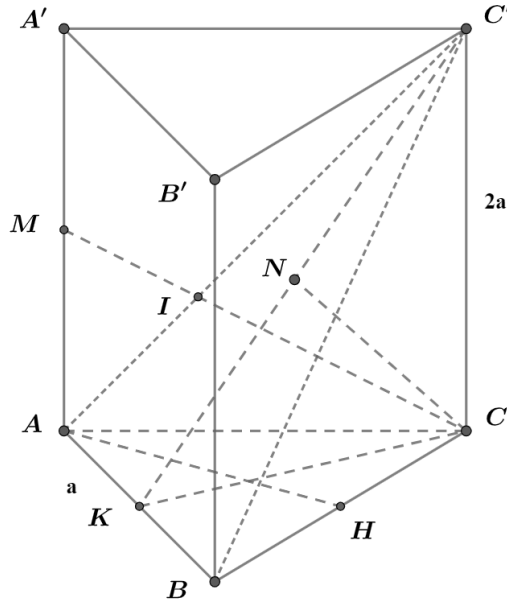
a) Khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AB là $3a$.

c) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

d) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AC'B)$ bằng $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Lời giải



a) Đúng: Vì $AA' \perp (ABC)$ nên $d(A', (ABC)) = AA' = 2a$.

b) Sai: Ta có: $B'C' \parallel (ABC)$ suy ra $d(B'C', AB) = d(B'C', (ABC)) = d(B', (ABC)) = BB' = 2a$

c) Đúng: Vì $M \in AA' \parallel (BCC'B')$ nên $d(M, (BCC'B')) = d(A, (BCC'B'))$.

Dựng $AH \perp BC$ trong (ABC) . Khi đó: $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$

$\Rightarrow d(A, (BCC'B')) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao trong tam giác đều).

d) Sai: Gọi $I = CM \cap AC'$ trong $(ACC'A')$ và K là trung điểm AB . Dựng $CN \perp C'K$ trong (CKC') .

Ta có: $\begin{cases} AB \perp CK \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CKC') \Rightarrow AB \perp CN \subset (CKC')$ mà $CN \perp C'K$ (gt)

$\Rightarrow CN \perp (AC'B) \Rightarrow d(C, (AC'B)) = CN$.

Ta có $\frac{d(M, (AC'B))}{d(C, (AC'B))} = \frac{MI}{CI} = \frac{MA}{CC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(M, (AC'B)) = \frac{1}{2} d(C, (AC'B)) = \frac{CN}{2}$.

Xét tam giác $CC'K$ có: $\frac{1}{CN^2} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{CK^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow CN = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Vậy $d(M, (AC'B)) = \frac{CN}{2} = \frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 14: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $AA' = 2a$.

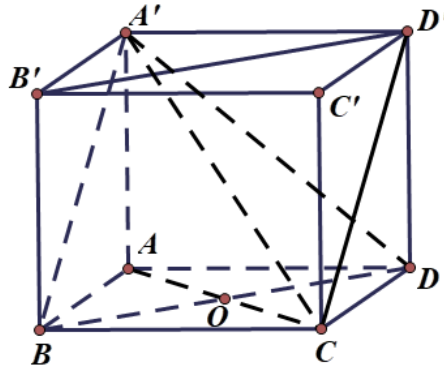
a) Độ dài $A'C$ bằng $a\sqrt{3}$.

b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a .

c) Khoảng cách giữa $B'D'$ và AC bằng $2a$.

d) Khoảng cách giữa BD và CD' bằng $\frac{a}{3}$.

Lời giải



a) Sai: Ta có: $A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{AA'^2 + AB^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$

b) Đúng: Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCC'B') \Rightarrow d(A; (BCC'B')) = AB = a$

c) Đúng: Có $B'D' \subset (A'B'C'D') \cap (ABCD) \supset AC \Rightarrow d(B'D'; AC) = d((A'B'C'D'); (ABCD)) = 2a$.

d) Sai: Ta có: $CD' // A'B \Rightarrow CD' // (A'BD) \supset BD$

$\Rightarrow d(BD; CD') = d(CD'; (A'BD)) = d(C; (A'BD)) = d(A; (A'BD))$

Ta thấy $AA'BD$ là tứ diện có AB, AD, AA' đôi một vuông góc

$$\Rightarrow \frac{1}{d^2[A; (A'BD)]} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow d(A; (A'BD)) = \frac{2a}{3}.$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác cân và $(SAB) \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của CD và AB .

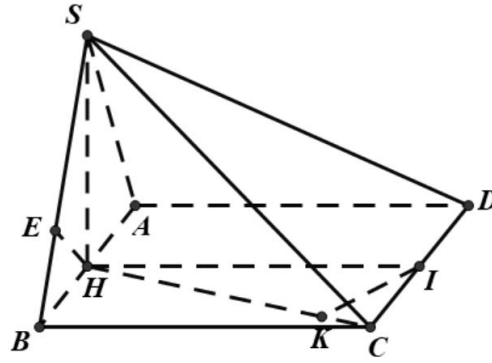
a) Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là $\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{15}}{8}$.

c) Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SHC) là $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

d) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC) là $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có $\triangle SAB$ cân, H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (ABCD) \cap (SAB) = AB \\ (ABCD) \perp (SAB) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow d(S, (ABCD)) = SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

b) Sai: Kẻ $HE \perp SB$, ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp HE$, mà $HE \perp SB$.

Do đó $HE \perp (SBC) \Rightarrow d(H, (SBC)) = HE$.

$$\text{Ta có } \frac{d(A, (SBC))}{d(H, (SBC))} = \frac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC)) = 2HE$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{15a^2} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{15}}{8}.$$

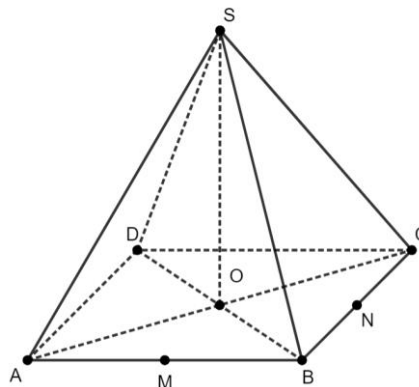
$$\text{Vậy } d(A, (SBC)) = 2HE = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

c) Đúng: Kẻ $IK \perp HC$, ta có $\begin{cases} IK \perp HC \\ IK \perp SH \end{cases} \Rightarrow IK \perp (SHC) \Rightarrow d(I, (SHC)) = IK$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IC^2} + \frac{1}{IH^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{5}}{5}. \text{ Vậy } d(I, (SHC)) = IK = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

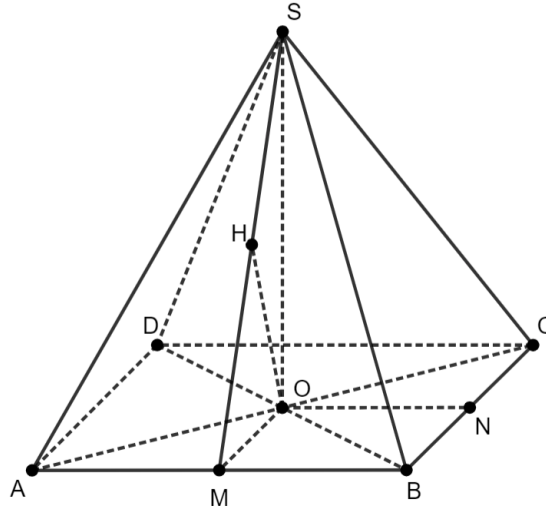
d) Sai: Ta có $\frac{d(D, (SHC))}{d(I, (SHC))} = \frac{DC}{IC} = 2 \Rightarrow d(D, (SHC)) = 2d(I, (SHC)) = 2IK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$

Câu 16: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC .



- a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $a\sqrt{2}$.
- b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng $\frac{a}{2}$.
- c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng ON và SB bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA bằng $\frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải



a) Sai: Vì $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp CD \end{cases}$ nên $d(AB; CD) = AD = a$.

b) Đúng: Vì $SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp OM$.

Mặt khác $OM \perp AB$ nên ta có OM là đoạn vuông góc chung của AB và SO .

Do đó $d(SO; AB) = OM = \frac{a}{2}$.

c) Sai: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SM .

Khi đó vì $AB \perp (SMO)$ nên $AB \perp OH$, suy ra $OH \perp (SAB)$.

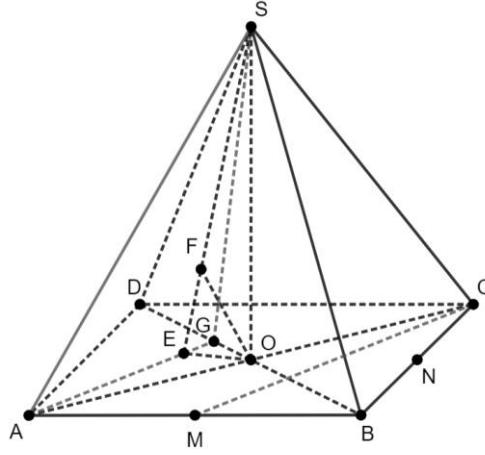
Vì thế ta có: $d(ON; SB) = d(ON; (SAB)) = d(O; (SAB)) = OH$.

Xét tam giác $\triangle OSA$ vuông tại O ta có $OS = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì M là trung điểm AB nên $OM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác vuông $\triangle SOM$ ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

d) Đúng: Trong tam giác $\triangle ADC$ gọi G là trọng tâm. Khi đó AG đi qua trung điểm của CD nên $AG \perp CM$, suy ra $d(CM; SA) = d(CM; (SAG)) = d(C; (SAG)) = 2d(O; (SAG))$



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên AG, SE .

Theo định lý 3 đường vuông góc thì $AG \perp (SOE)$, suy ra $AG \perp OF$.

Do đó $OF \perp (SAG)$, lúc này ta có $d(CM; SA) = 2d(O; (SAG)) = 2OF$.

Vì G là trọng tâm tam giác $\triangle DAC$ nên $OG = \frac{1}{3}DO = \frac{1}{6}BD = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Xét tam giác $\triangle SOE$ vuông tại O ta có $\frac{1}{OF^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OG^2} + \frac{1}{OS^2}$

$$\Rightarrow OF = \frac{a\sqrt{22}}{22}. \text{ Vậy } d(CM; SA) = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AD = 2a$, $AB = a$. Kẻ AM vuông góc với SB tại M .

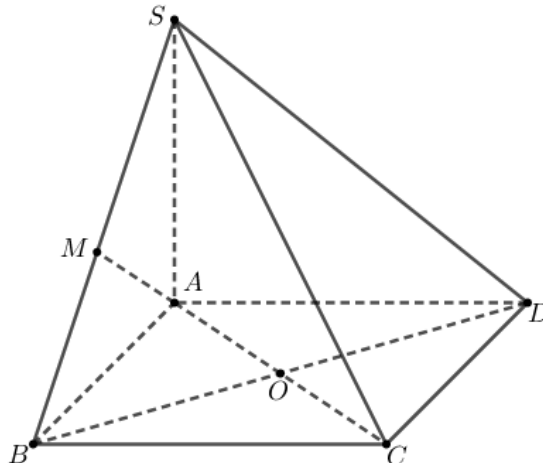
a) Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $2a$.

b) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$.

c) Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAD) bằng nửa khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD) .

d) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC) lớn hơn $\frac{a}{2}$.

Lời giải

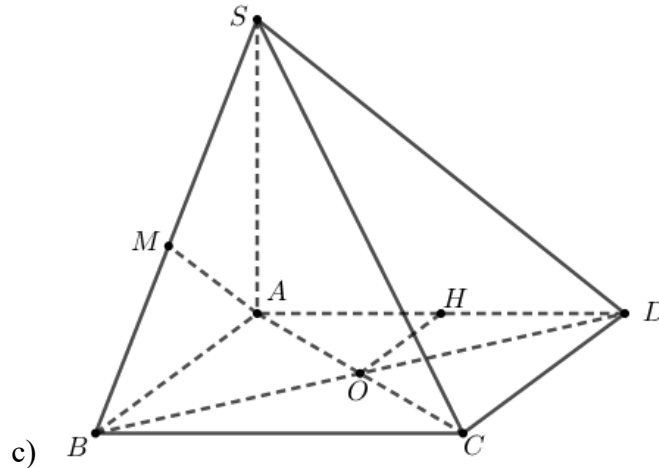


a) Đúng: Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $d(A, (ABCD)) = SA = 2a$.

b) Sai: Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$

Mà $AM \perp SB$ nên $AM \perp (SBC)$

$$\text{Do đó } d(A, (SBC)) = AM = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

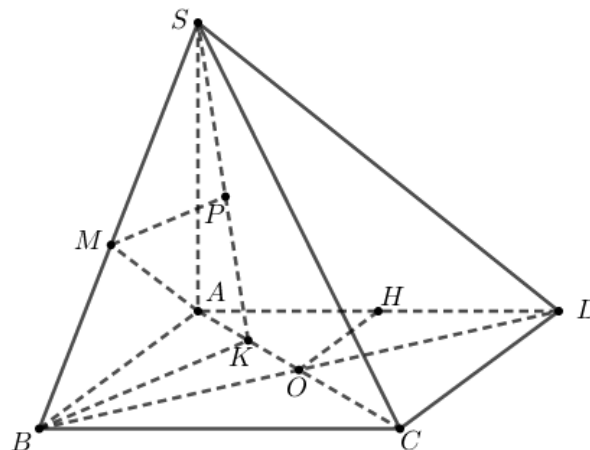


c) Đúng: Kẻ $OH \perp AD$ tại H , mà $OH \perp SA$ nên $OH \perp (SAD) \Rightarrow d(O, (SAD)) = OH$

Ta có $CD \perp AD$, $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow d(C, (SAD)) = CD$.

$$\text{Khi đó } \frac{d(O, (SAD))}{d(C, (SAD))} = \frac{OH}{CD} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2}$$

d) Đúng:



Kẻ $BK \perp AC$ tại K , mà $BK \perp SA$ nên $BK \perp (SAC)$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = BK = \frac{BA \cdot BC}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Trong mặt phẳng (SBK) , kẻ $MP \parallel BK$ ($P \in SK$), mà $BK \perp (SAC)$ nên $MP \perp (SAC)$

$$\Rightarrow d(M, (SAC)) = MP$$

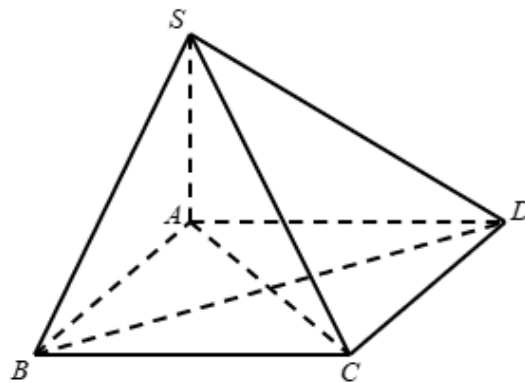
$$\text{Do đó } \frac{d(M, (SAC))}{d(B, (SAC))} = \frac{MP}{BK} = \frac{SM}{SB} = \frac{SM \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Hay } d(M, (SAC)) = \frac{4}{5} \cdot d(B, (SAC)) = \frac{4}{5} \cdot BK = \frac{4}{5} \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{5} = \frac{8a\sqrt{5}}{25} > \frac{a}{2}.$$

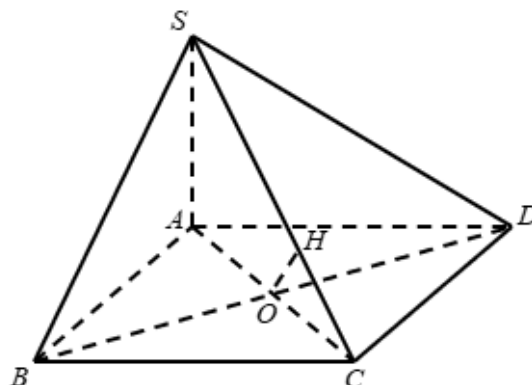
Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$.

- Khoảng cách từ S đến đường thẳng AC bằng $2\sqrt{2}a$.
- Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAD) bằng a .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng a .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải



- Sai: Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$. Vậy $d(S, AC) = SA = a\sqrt{6}$.
- Đúng: Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$. Vậy $d(C, (SAD)) = CD = a$.
- Đúng: Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$. Mặt khác $BC \perp CD$.
 $\Rightarrow BC$ là đoạn vuông góc chung của SB và CD . Vậy $d(SB, CD) = BC = a$.
- Sai:



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \text{ tại } O.$$

Trong mặt phẳng (SAC) : từ O kẻ $OH \perp SC$ tại H .

Ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ (do $BD \perp (SAC), OH \subset (SAC)$). Vậy OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD .

$$\text{Ta có } \sin ACS = \frac{SA}{SC} = \frac{OH}{OC} \Rightarrow OH = \frac{OC \cdot SA}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{6}}{2\sqrt{2}a} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(SC, BD) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi H là trung điểm của AB .

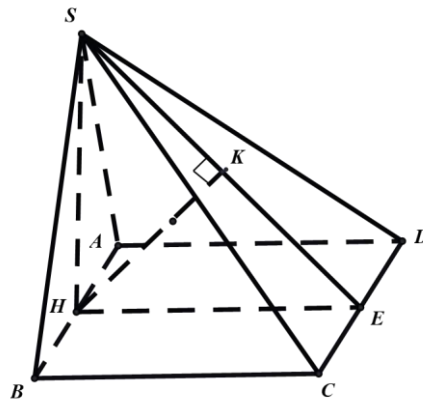
a) $SH \perp (ABCD)$.

b) $d(A, (SCD)) = d(H, (SCD))$.

c) Gọi E là trung điểm của CD , khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) là độ dài đoạn thẳng AK (Với K là hình chiếu của H lên SE , K thuộc SE).

d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải



a) Đúng: Do tam giác SAB đều và H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

$$\begin{cases} SH \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

b) Đúng: Ta có: $AH \parallel CD \Rightarrow AH \parallel (SCD)$

$$\text{Vậy } d(A, (SCD)) = d(H, (SCD))$$

c) Sai: Ta có: $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên gọi E là trung điểm CD thì $HE \perp CD$.

Vậy $CD \perp (SHE)$.

Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SHE)$.

Ta có $(SCD) \cap (SHE) = SE$.

Kẻ $HK \perp SE$ với $K \in SE$ nên $HK \perp (SCD)$.

Khi đó $d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK$.

d) Đúng: Vì $AB = a$ nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $HE = a$. Vì $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HE$.

Khi đó $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{7}{3a^2}$, nên $HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(H, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 20: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AA' .

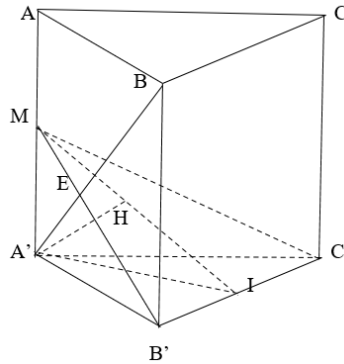
a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'B'$ là a .

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ là $a\sqrt{2}$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là a .

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng MB' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



a) Đúng: Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'B'$ bằng $AA' = a$ (do $AB \parallel A'B'$)

b) Sai: Ta có $AB \perp BB'$ và $B'C' \perp BB'$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ bằng BB' ($BB' = a$)

c) Sai: Gọi I là trung điểm của $B'C'$

$AA' \perp A'I$, tam giác $A'B'C'$ đều nên $A'I \perp B'C'$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ bằng $A'I$ (I là trung điểm của $B'C'$)

$$A'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

d) Đúng: Gọi H là hình chiếu của A' trên MI
 E là giao điểm của $A'B$ và MB'

Do $BC \parallel B'C'$ nên $d(B'M, BC) = d(BC, (MB'C')) = d(B, (MB'C'))$

$$= 2d(A', (MB'C')) \quad (\text{do } \frac{BE}{A'E} = \frac{BB'}{A'M} = 2)$$

$$d(A', (MB'C')) = A'H$$

$$\text{Ta có } A'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad A'M = \frac{a}{2}$$

$$\text{Suy ra } A'H = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \text{ Vậy } d(B'M, BC) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

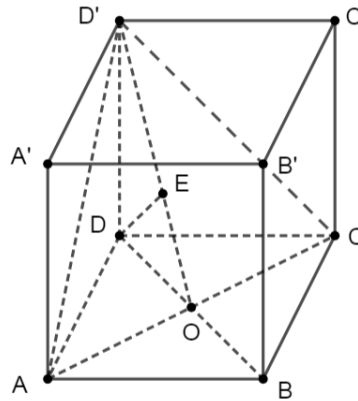
a) Khoảng cách giữa AB và $C'D'$ bằng $2a$.

b) Khoảng cách giữa $B'D'$ và AB bằng $a\sqrt{2}$.

c) Khoảng cách giữa AD' và CC' bằng a .

d) Khoảng cách giữa BC' và CD' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



a) Sai: Ta có: $\begin{cases} AB \perp AD' \\ C'D' \perp AD' \end{cases} \Rightarrow d(AB, C'D') = AD' = a\sqrt{2}.$

(Vì AD' là đường chéo trong hình vuông $AA'D'D$).

b) Sai: Ta có: $AB \parallel (A'B'C'D') \Rightarrow d(AB, B'D') = d(AB, (A'B'C'D'))$
 $= d(A, (A'B'C'D')) = AA' = a$

c) Đúng: Ta có: $CC' \parallel AA' \Rightarrow CC' \parallel (AA'D'D)$

Nên $d(CC', AD') = d(CC', (AA'D'D)) = d(C, (AA'D'D)) = CD = a.$

d) Đúng: Ta có: $BC' \parallel AD \Rightarrow BC' \parallel (AD'C)$

$$\text{Nên } d(BC', CD') = d(BC', (AD'C)) = d(B, (AD'C)) = d(D, (AD'C))$$

$$\text{Lấy } AC \cap BD = O. \text{ Dựng } DE \perp D'O \text{ tại } E \Rightarrow DE \perp (AD'C) \Rightarrow d(D, (AD'C)) = DE$$

$$\text{Do đó, } d(BC', CD') = DE$$

$$\text{Mà } DA \perp DC \perp DD' \Rightarrow \frac{1}{DE^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{D'D^2}, \text{ Suy ra } d(BC', CD') = DE = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

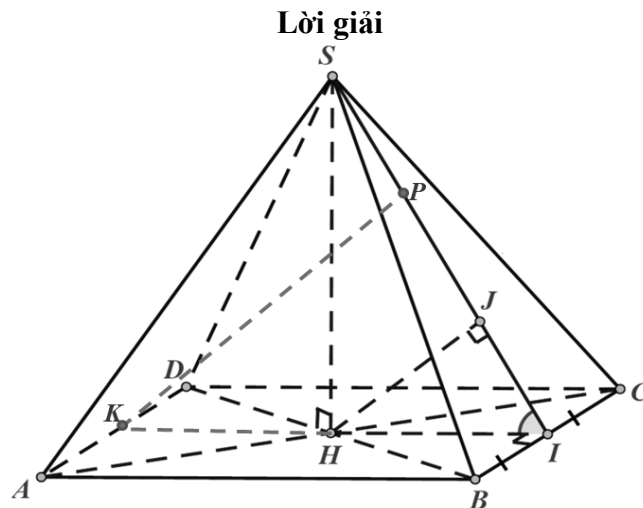
Câu 22: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, H là tâm của đáy, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° , I là trung điểm BC .

a) Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng SH .

b) Khoảng cách giữa SH và BC là $\frac{a}{2}$.

c) Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{3a}{4}$.

d) Khoảng cách giữa SI và AD là $\frac{3a}{2}$.



a) Đúng: Theo tính chất hình chóp đều ta có $SH \perp (ABCD)$

Suy ra khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng SH .

b) Sai: $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $S.ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow HI \perp BC$ mà $SH \perp (ABCD)$, $HI \subset (ABCD) \Rightarrow HI \perp SH$

$$\Rightarrow \text{Khoảng cách giữa } SH \text{ và } BC \text{ bằng } HI = \frac{1}{2} AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

c) Đúng: Dựng $HJ \perp SI \Rightarrow HJ \perp (SBC) \Rightarrow d(H, (SBC)) = HJ$

Theo giả thiết, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60^\circ \Rightarrow \angle SIH = 60^\circ$

$$\text{Tam giác } HJI \text{ vuông tại } J, \text{ nên } HJ = HI \cdot \sin SIH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}.$$

d) Đúng: Ta có, $AD \parallel (SBC)$, $SI \subset (SBC) \Rightarrow d(SI, AD) = d(AD, (SBC)) = d(K, (SBC))$

K là trung điểm, $K = IH \cap AD$, $KP \perp SI \Rightarrow KP \perp (SBC) \Rightarrow KP = d(K, (SBC))$

Có H là trung điểm IK nên $KP = 2HJ = 2 \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a}{2}$.

Vậy $d(SI, AD) = \frac{3a}{2}$.

D // BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa cạnh SB và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)

Lời giải

Do $HI \parallel BC$ nên dễ dàng chỉ ra được I là trung điểm của AB và $IH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

Ta có $AB \perp SI$ nên $SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Do $SH \perp IH$ nên xét tam giác vuông SIH có:

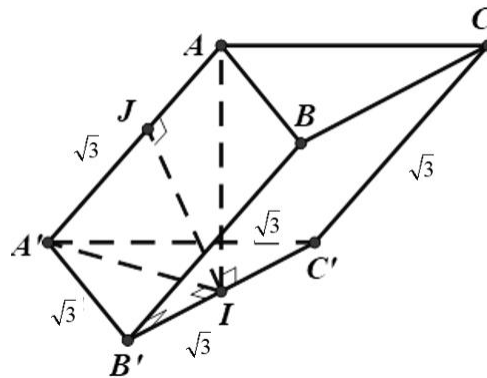
$$SH = \sqrt{SI^2 - IH^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}} = a.$$

$$HK = \frac{SH \cdot HI}{SI} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Do vậy, ta có $d(H, (SAB)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng $\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A trên mp $(A'B'C')$ trùng với trung điểm I của $B'C'$. Tính khoảng cách từ AA' đến mặt bên $(BCC'B')$

Lời giải



Ta có: $AA' \parallel BB' \subset (BCC'B')$

$$\Rightarrow AA' \parallel (BCC'B')$$

Gọi J là hình chiếu của I trên $AA' \Rightarrow IJ \perp AA' \parallel BB' \Rightarrow IJ \perp BB'$

Mặt khác, theo giả thiết suy ra:

$$\begin{cases} B'C' \perp A'I \subset (AA'I) \\ B'C' \perp AI \subset (AA'I) \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'I)$$

Suy ra: $IJ \perp B'C'$, tức là $IJ \perp (BCC'B')$, mà $J \in AA'$ nên $d(AA', (BCC'B')) = IJ$

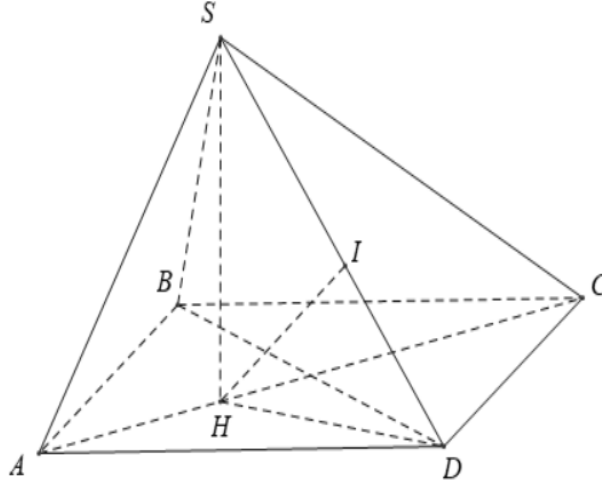
$$\text{Trong } \triangle AA'I \Rightarrow IJ \cdot AA' = AI \cdot A'I \Rightarrow IJ = \frac{AI \cdot A'I}{AA'}.$$

$$\text{Để thấy } A'I = \frac{3}{2}, AI = \sqrt{AA'^2 - A'I^2} = \sqrt{3 - \frac{3 \cdot 3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Suy ra: } IJ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(AA', (BCC'B')) = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng $6\sqrt{6}$, $SA = SB = SD = 12$ và tam giác ABD đều. Khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$
 $\Rightarrow d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)).$

Ta có: $SA = SB = SD$ suy ra hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABD .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Theo giả thiết tam giác ABD đều nên có H là trọng tâm của tam giác ABD .

Ta có $DH \perp AB \Rightarrow HD \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHD)$.

Kẻ $HI \perp SD, I \in SD$ suy ra $HI \perp (SCD)$. Khi đó, $d(H, (SCD)) = HI$.

$$AH = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{2}; \quad SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}$$

Tam giác SHD có $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{(6\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(6\sqrt{2})^2} = \frac{1}{36} \Rightarrow HI = 6$ hay

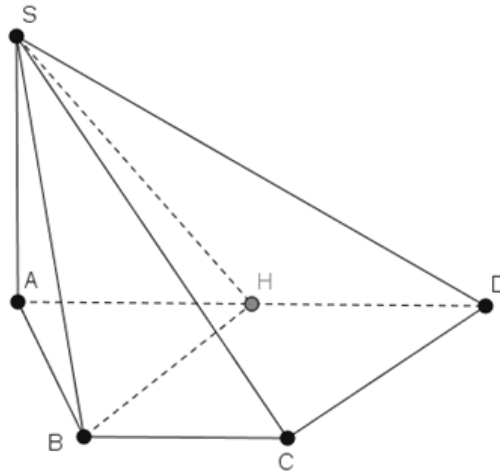
$$d(H, (SCD)) = 6.$$

$$\text{Mà mặt khác ta thấy: } \frac{d(A, (SCD))}{d(H, (SCD))} = \frac{AC}{HC} = \frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = \frac{3}{2} d(H, (SCD)) = \frac{3}{2} HI = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = \sqrt{3}$, $AD = 2\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa SB và CD .

Lời giải



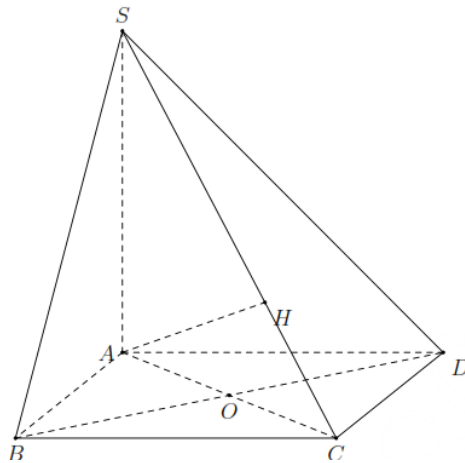
Gọi H là trung điểm của AD ta có $d(CD, SB) = d(CD, (SHB)) = d(D, (SHB)) = d(A, (SHB))$

$$\text{Ta có } \frac{1}{d^2(A, (SHB))} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{3}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

Vậy khoảng cách giữa SB và CD là 1

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách từ điểm O đến SC .

Lời giải



Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

Do O là tâm của hình vuông $ABCD$ nên $d(O, SC) = \frac{1}{2}d(A, SC)$.

Trong tam giác SAC vuông tại A hạ $AH \perp SC$.

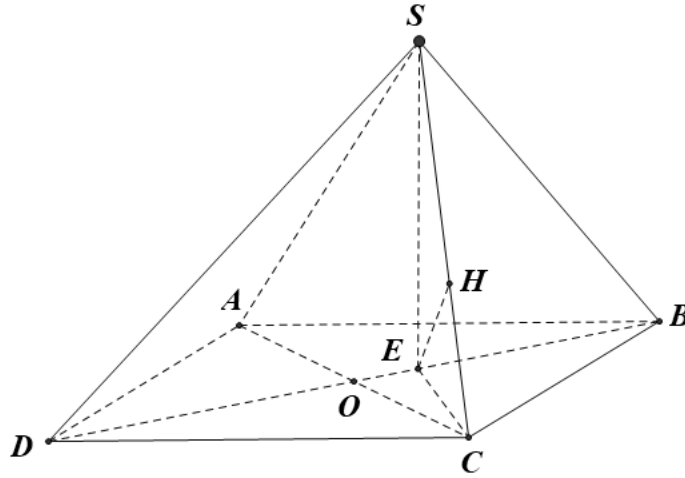
$$\text{Suy ra } d(A, SC) = AH = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(O, SC) = \frac{1}{2}d(A, SC) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC .

Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) theo a

Lời giải



Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$ và E là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\begin{cases} SD \cap (ABCD) = D \\ SE \perp (ABCD) \text{ tại } E \end{cases} \Rightarrow (SD, (ABCD)) = (SD, ED) = SDE = 30^\circ$$

Do tam giác ABC đều nên
$$\begin{cases} BD = 2BO = a\sqrt{3} \Rightarrow DE = \frac{2}{3}BD = a\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ CE = \frac{2}{3}BO = a\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Khi đó $\tan SDO = \frac{SE}{DE} \Rightarrow SE = \frac{2a}{3}$

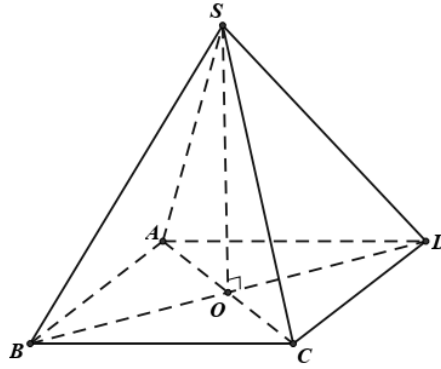
Vì tam giác ABC đều nên $CE \perp AB \Rightarrow CE \perp CD$ mà $CD \perp SE$ nên $CD \perp (SEC)$

Kẻ $EH \perp SC$ ($H \in SC$) khi đó $EH \perp (SCD)$ tại H nên $d(E, (SCD)) = EH$

$$\frac{1}{EH^2} = \frac{1}{SE^2} + \frac{1}{EC^2} = \frac{1}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \Rightarrow EH = a\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

Do $BE \cap (SCD) = D$ nên $\frac{d(B, (SCD))}{d(E, (SCD))} = \frac{BD}{ED} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{3}{2}d(E, (SCD)) = a\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng



Lời giải

Gọi $O = AC \cap DB$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông.

$$\text{Ta có: } \frac{d(A, (SCD))}{d(O, (SCD))} = \frac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)).$$

Tam giác $\triangle ACD$ vuông tại D có: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OD = OC = a\sqrt{2}$.

Tam giác $\triangle SCO$ vuông tại O có: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = a\sqrt{7}$.

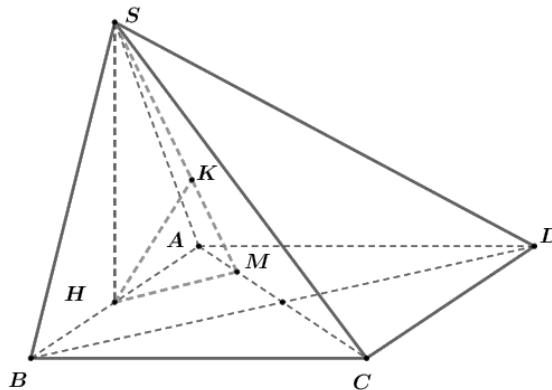
Do SO, OC, OD đôi một vuông góc nên gọi $h = d(O, (SCD))$ thì

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{8}{7a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AB . Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC) bằng

Lời giải



Tam giác SAB vuông cân tại S , H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

Từ H dựng $HM \perp AC$ tại M , từ H dựng $HK \perp SM$ tại K . Ta có

$$\begin{cases} AC \perp HM \\ AC \perp SH \text{ (} SH \perp (ABCD) \text{)} \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHM) \Rightarrow AC \perp HK.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} HK \perp SM \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC) \text{ tại } K \text{ nên } d(H, (SAC)) = HK.$$

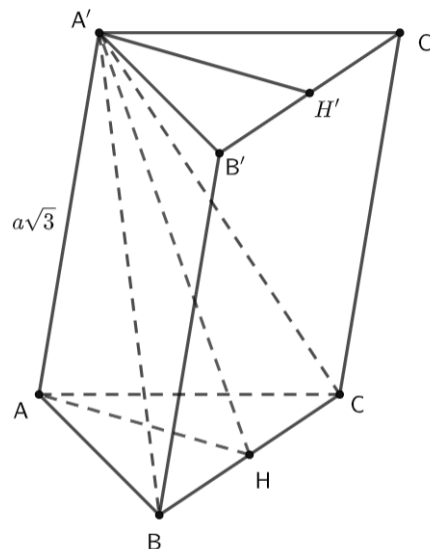
$$\text{Ta có } \begin{cases} SH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \\ HM = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \end{cases}. \text{ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông } SHM. \text{ Ta có}$$

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vậy } d(H, (SAC)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 10: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân tại A . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm của cạnh BC . Biết cạnh $AA' = a\sqrt{3}$ và tạo với mặt đáy của hình lăng trụ một góc 60° . Khoảng cách từ đỉnh C' đến mặt $(A'BC)$ bằng

Lời giải



Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Vì $A'H \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng (ABC) . Khi đó góc giữa AA' và mặt phẳng (ABC) là góc giữa AA' và AH , hay chính là góc $A'AH$.

Vì $A'H \perp (ABC)$ nên $A'H \perp AH$ hay tam giác $AA'H$ vuông tại H .

$$\text{Khi đó } \cos A'AH = \frac{AH}{AA'} \Rightarrow AH = AA' \cdot \cos A'AH = a\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Gọi H' là trung điểm của cạnh $B'C'$.

Tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại A' nên $A'H' \perp B'C'$.

$$A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp (A'B'C') \Rightarrow A'H \perp A'H'.$$

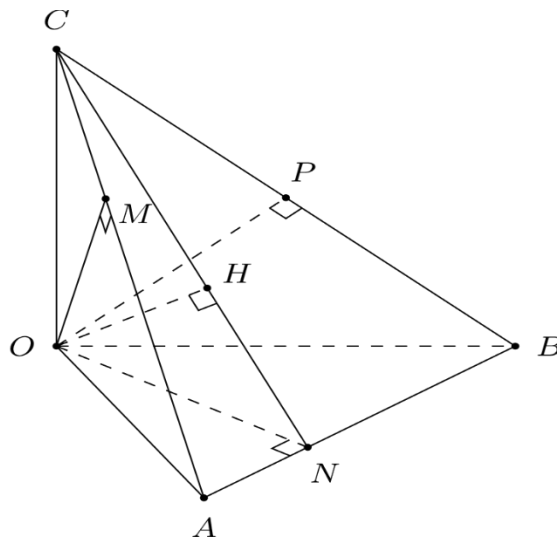
$$\text{Ta có } \begin{cases} A'H' \perp B'C' \\ A'H' \perp A'H \\ A'H \cap BC = \{H\} \\ A'H, BC \subset (A'BC) \end{cases} \Rightarrow A'H' \perp (A'BC).$$

Vì $BC \subset B'C'$, $BC \subset (A'BC)$ nên $B'C' \perp (A'BC)$.

$$\text{Suy ra } d(C'; (A'BC)) = d(B'C'; (A'BC)) = d(H'; (A'BC)) = A'H' = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Câu 11: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết khoảng cách từ điểm O đến các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt là $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) theo a

Lời giải



Kẻ $OM \perp AC$ ($M \in AC$), $ON \perp AB$ ($N \in AB$), $OP \perp BC$ ($P \in BC$).

Khi đó ta có $OP = a$, $OM = a\sqrt{2}$, $ON = a\sqrt{3}$.

Trong (OCN) kẻ $OH \perp CN$ ($H \in CN$) ta có:

$$\begin{cases} AB \perp ON \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCN) \Rightarrow AB \perp OH$$

$$\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp CN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow d(O, (ABC)) = OH$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Lại có:

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OC^2}; \quad \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}; \quad \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} = 2 \left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right)$$

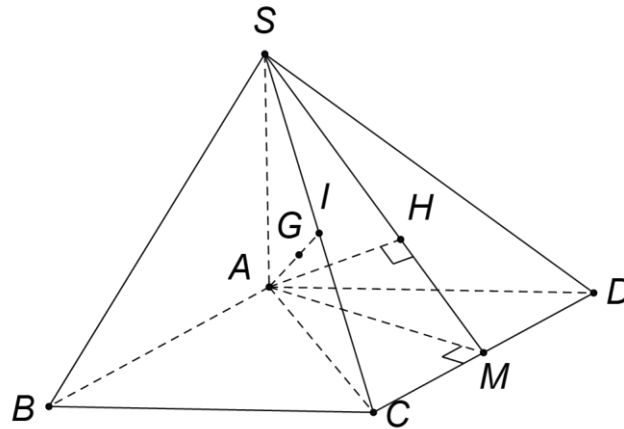
$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{11}{12a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{11}{12a^2} \Rightarrow OH = \frac{2a\sqrt{33}}{11}$$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\angle ADC = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \sqrt{6}a$, G là trọng tâm tam giác SAC . Khoảng cách từ G đến (SCD) là

Lời giải



Gọi M, I lần lượt là trung điểm CD, SC .

Theo giả thiết ta có tam giác ACD đều. Suy ra $AM = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$.

Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) thì $AH \perp (SCD)$.

Ta có $GI = \frac{1}{3}AI$ nên $d(G, (SCD)) = \frac{1}{3}d(A, (SCD)) = \frac{1}{3}AH$

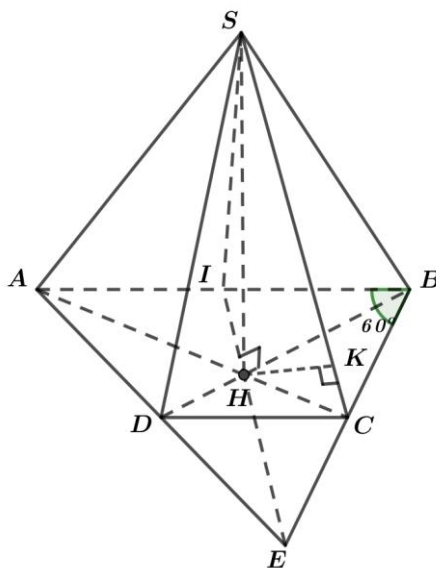
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{AM \cdot SA}{\sqrt{AM^2 + SA^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a \cdot \sqrt{6}a}{\sqrt{3a^2 + 6a^2}} = \frac{\sqrt{2}a}{3}$$

$$\text{Vậy } d(G, (SCD)) = \frac{\sqrt{2}a}{3}.$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang cân có góc ở đáy bằng 60° . $AB = 2CD = 2a$

, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc 45° . Hình chiếu vuông góc của S lên đáy trùng với giao điểm của AC và BD . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



-Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E , lấy I là trung điểm AB . Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên đáy, kẻ HK vuông góc với SC tại K .

Xét tam giác ABE có $ABE = BAE = 60^\circ$ nên ABE là tam giác đều và H là trực tâm

$$\Rightarrow \begin{cases} AC \perp BC \\ HI \perp AB \\ HI = HC = \frac{1}{3}EI = \frac{1}{3}2a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$-\Delta SHA = \Delta SHB \Rightarrow SA = SB \Rightarrow SI \perp AB \Rightarrow ((SAB), (ABCD)) = \angle SIH = 45^\circ$$

$$\Rightarrow SH = IH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$-\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp HK, \text{ ta lại có } \begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp BC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$$

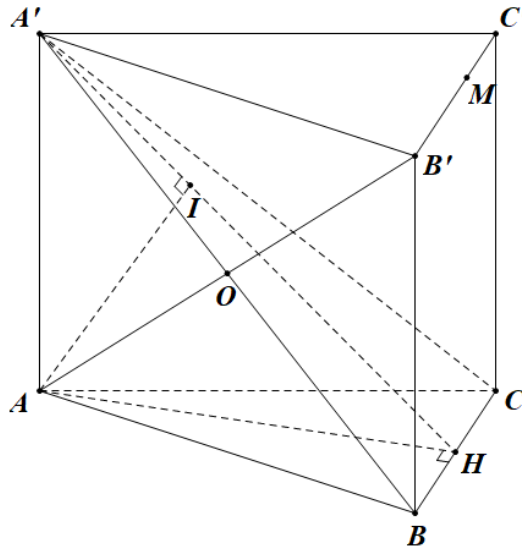
$$\text{Suy ra khoảng cách từ } H \text{ đến } (SBC) \text{ là } HK = \frac{HS \cdot HC}{\sqrt{HS^2 + HC^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$-\text{Tam giác } HAB \text{ đồng dạng với tam giác } HCD \text{ và } AB = 2CD \text{ nên } \frac{AH}{HC} = \frac{AB}{CD} = 2$$

$$\text{Vậy khoảng cách từ } A \text{ đến } (SBC) \text{ bằng 3 lần khoảng cách từ } H \text{ đến } (SBC) = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 14: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 45° , M là điểm tùy ý thuộc cạnh $B'C'$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

Lời giải



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên là lăng trụ đứng có đáy ABC là tam giác đều.

Ta có $B'C' \parallel (A'BC)$ nên $d(M, (A'BC)) = d(B', (A'BC))$.

Mà $AB' \cap (A'BC) = O$ với O là trung điểm AB' nên $d(B', (A'BC)) = d(A, (A'BC))$.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC , I là hình chiếu của A lên $A'H$, ta chứng minh được $AI \perp (A'BC)$, suy ra $d(A, (A'BC)) = AI$.

Mà $\left((A'BC), (ABC) \right) = A'HA = 45^\circ$ nên tam giác $A'AH$ vuông cân tại A , do đó

$$A'H = AH\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Mặt khác, AI là đường cao của tam giác $A'AH$ nên $AI = \frac{A'H}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 15: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng $2a$, $B'D = 3a$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

Lời giải

Qua H dựng đường thẳng song song với AN cắt d tại E và cắt BC tại K . Khi đó từ

giác $AEKN$ là hình chữ nhật.

Ta có: $BC \parallel AE \Rightarrow BC \parallel (SAE) \Rightarrow d(BC, SA) = d(BC, (SAE)) = d(K, (SAE))$

Mặt khác $\frac{HB}{HA} = \frac{HK}{HE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{KH}{KE} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(K, (SAE)) = \frac{3}{2} d(H, (SAE))$.

Ta có $\begin{cases} AE \perp SH \\ AE \perp KE \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SHE) \Rightarrow (SHE) \perp (SAE)$

Trong mặt phẳng (SHE) kẻ $HI \perp SE$ tại I . Từ đó suy ra:

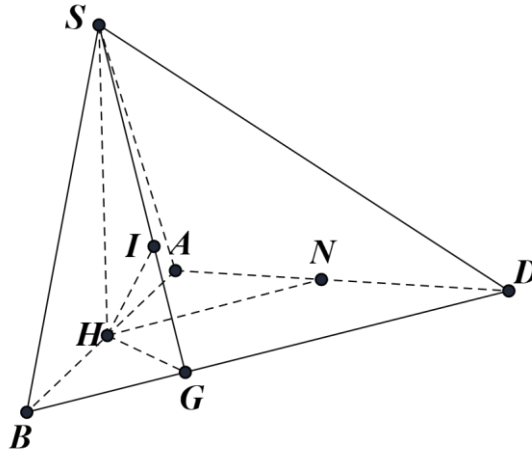
$$HI \perp (SAE) \Rightarrow d(H, (SAE)) = HI \Rightarrow d(BC, SA) = \frac{3}{2} HI.$$

$$HK = \frac{1}{3} AN \Rightarrow EH = \frac{2}{3} AN = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HI = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{6}.$$

$$\text{Vậy } d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{42}}{4}.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABD$ có đáy là tam giác vuông tại A , cạnh $AB = 2AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABD) . Gọi H, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Khoảng cách giữa HN và SD bằng

Lời giải



Vì H, N lần lượt là trung điểm của AB, AD nên $HN \parallel BD \Rightarrow HN \parallel (SBD)$

$$\Rightarrow d(HN, SD) = d(HN, (SBD)) = d(H, (SBD))$$

Vì tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABD) nên $SH \perp (ABD)$.

Từ H kẻ $HG \perp BD$ tại G , kẻ $HI \perp SG$ tại I .

Suy ra $HI \perp (SBD) \Rightarrow d(H, (SBD)) = HI$.

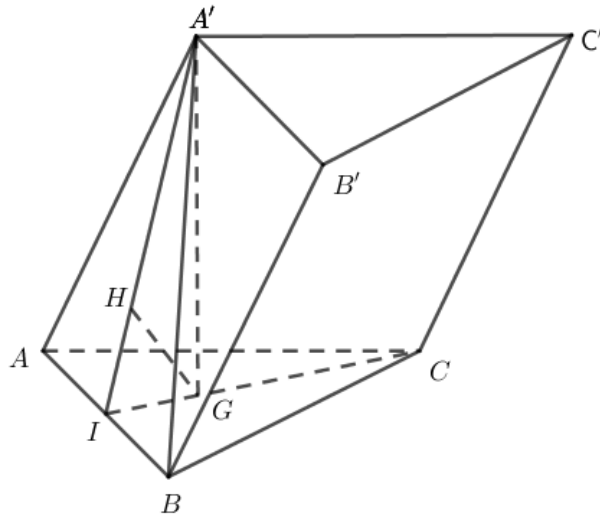
$$\text{Ta có } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Lại có $\triangle BGH$ đồng dạng với $\triangle BAD$ nên $\frac{HG}{AD} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow HG = \frac{AD \cdot BH}{BD} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{10}$.

Khi đó $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HG^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{5}}{10}\right)^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{8} \Rightarrow d(HN, SD) = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Câu 18: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC và diện tích tam giác $A'AB$ bằng $\frac{a^2}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và AB' .

Lời giải



Chọn mặt phẳng $(AA'B'A')$ chứa AB' và song song với CC' .

Khi đó $d(AB', CC') = d(CC', (AA'B'B)) = d(C, (AA'B'B))$.

Gọi I là trung điểm của AB . Vì tam giác ABC đều nên $CI \perp AB \Rightarrow GI \perp AB$.

Vì $\begin{cases} A'G \perp AB \\ GI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'GI) \Rightarrow AB \perp A'I$.

$GI = \frac{1}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vì diện tích tam giác $A'AB$ bằng $\frac{a^2}{4}$ nên $\frac{1}{2}A'I \cdot AB = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow A'I = \frac{a}{2}$.

Suy ra $A'G = \sqrt{A'I^2 - GI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Trong mặt phẳng $(A'GI)$ kẻ $GH \perp A'I$ ($H \in A'I$).

Khi đó $\begin{cases} GH \perp A'I \\ GH \perp AB \quad (AB \perp (A'GI)) \end{cases}$ suy ra $GH \perp (AA'B'B) \Rightarrow d(G, (AA'B'B)) = GH$.

Xét tam giác $\Delta A'GI$ vuông tại G có

$$GH.A'I = A'G.GI \Rightarrow d(G, (AA'B'B)) = GH = \frac{A'G.GI}{A'I} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Ta lại có } \frac{d(C, (AA'B'B))}{d(G, (AA'B'B))} = \frac{CI}{GI} = 3 \Rightarrow d(C, (AA'B'B)) = 3.d(G, (AA'B'B)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(AB', CC') = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 19: Một quạt trần có bề dày thân quạt là 30 cm, người thợ muốn treo quạt sao cho khoảng cách từ đỉnh quạt đến sàn là 3 m. Cho biết trần nhà cao 4 m, khi đó chiều dài cán quạt là:



Lời giải

Chiều dài cán quạt là: $4 - 3 - 0,3 = 0,7$ m.

Câu 20: Một cây cầu dành cho người đi bộ có mặt sàn cầu cách mặt đường 4 m (giả sử mặt sàn cầu vượt song song với mặt đường), khoảng cách từ đường thẳng a nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu là 1m. Gọi b là đường thẳng kẻ theo tim đường. Khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b là:



Lời giải

Gọi mặt (P) là mặt sàn cầu vượt và mặt (Q) là mặt đường.

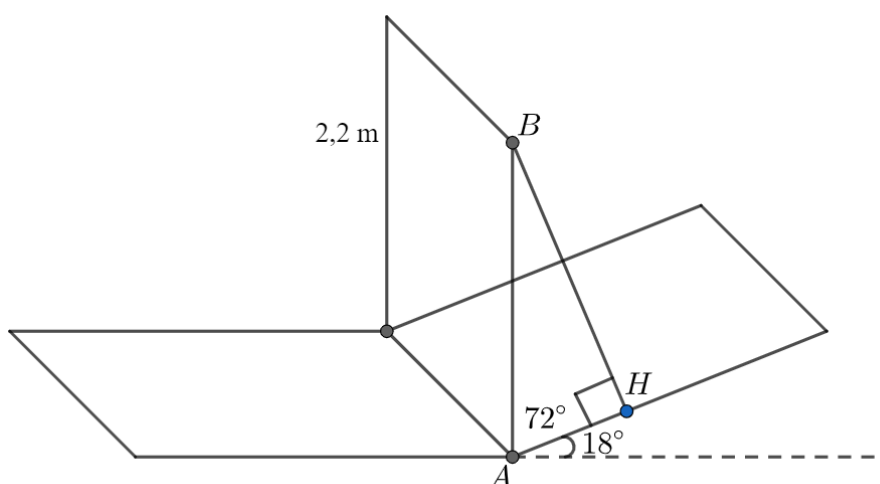
Vì $a \parallel (P), (P) \parallel (Q) \Rightarrow d(a; b) = d(a; (P)) + d((P); (Q)) = 1 + 4 = 5$ m.

Câu 21: Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung không chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng 2,2 m. Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc. Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng 18° so với phương nằm

ngang. Tính khoảng cách giữa hai thanh ngang của khung và mặt đường dốc (theo đơn vị mét và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

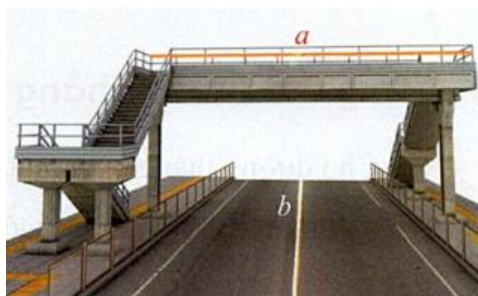


Gọi B là một điểm nằm trên thanh ngang và H là hình chiếu vuông góc của B xuống mặt dốc.

Khi đó khoảng cách giữa hai thanh ngang của khung và mặt đường dốc là BH .

Ta có $BH = AB \cdot \sin 72^\circ \approx 2,09$ m.

Câu 22: Một cây cầu dành cho người đi bộ (Hình bên dưới) có mặt sàn cầu cách mặt đường 3,5 m, khoảng cách từ đường thẳng a nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu là 0,8 m. Gọi b là đường thẳng kẻ theo tim đường. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b .



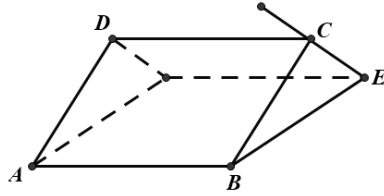
Lời giải

Ta có: $d(a, b) = 3,5 + 0,8 = 4,3$ (m).

Câu 23: Trên một mái nhà nghiêng 30° so với mặt phẳng nằm ngang, người ta dựng một chiếc cột vuông góc với mái nhà. Hỏi chiếc cột tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?

Lời giải

Gọi AB là giao tuyến của mặt phẳng mái nhà và mặt phẳng nằm ngang, AD là đường thẳng nằm trên mái nhà và vuông góc với AB , đường thẳng DE là chiếc cột vuông góc với mái nhà, đường thẳng AE nằm trên mặt phẳng nằm ngang, khi đó tam giác ADE vuông tại D , đường thẳng AE là hình chiếu vuông góc của DE trên mặt phẳng nằm ngang, mà góc DAE bằng 30° nên góc giữa hai đường thẳng DE và AE bằng 60° .



Vậy góc giữa đường thẳng DE (chiếc cột) và mặt phẳng nằm ngang bằng góc giữa hai đường DE và AE bằng 60° .

Câu 24: Giá đỡ ba chân được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng bằng 110 cm. Biết các chân của giá đỡ dài 129 cm. Hỏi chiều cao của giá đỡ bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2)?

Lời giải

Chiều cao của giá đỡ là: $\sqrt{129^2 - \left(\frac{110 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 112 \text{ (cm)} = 1,12 \text{ (m)}.$

